С. В. Хаустов
В. О. Харламов
С. В. Кузьмин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СВАРКЕ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. В. Хаустов
В. О. Харламов
С. В. Кузьмин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СВАРКЕ

Учебно-методическое пособие

Волгоград
2016

УДК 621.79 (075)

Р е ц е н з е н т ы :

директор ДИЦ «Мост»
канд. техн. наук, *В. М. Букин*;

директор ЗАО «Волгоградский завод сварочных материалов ХОБЭКС»,
В. А. Пронин

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Хаустов, С. В.
Численное моделирование тепловых процессов в сварке : учеб.-метод. пособие / С. В. Хаустов, В. О. Харламов, С. В. Кузьмин; ВолгГТУ. – Волгоград, 2016. – 60 с.

ISBN 978-5-9948-2312-5

Представлен теоретический материал, не вошедший в курс лекций по дисциплине «Тепловые процессы в сварке». Рассмотрены примеры использования численных методов в решениях линейных и нелинейных задач теплопроводности при сварке.

Предназначено для студентов, обучающихся в рамках подготовки бакалавров по направлению 15.03.01 «Машиностроение», профиль «Оборудование и технология сварочного производства».

Ил. 21. Библиогр. : 9 назв.

ISBN 978-5-9948-2312-5

© Волгоградский государственный
технический университет, 2016

Оглавление

Введение …… 4

Основные понятия и определения, используемые в расчетах тепловых процессов при сварке…….. 6

Одномерное уравнение теплопроводности ……. 15

Конечно-разностная аппроксимация граничных условий второго и третьего рода…….. 35

Двухслойная пластина (граничные условия четвертого рода) 39

Задача теплопроводности с внутренними источниками …… 42

Одномерное уравнение теплопроводности с зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности …….. 43

Двумерная задача теплопроводности …….. 53

Список использованной литературы…… 58

Введение

Большинство существующих способов сварки основано на нагреве материала до пластического состояния или плавления. Теплоту, необходимую для этого получают из различных источников энергии, различающихся между собой по характеру выделения теплоты, мощности, продолжительности действия и прочим признакам. Свариваемые изделия различаются по свойствам материала, формам и размерам и если принять во внимание условия, в которых происходит сварка – подогрев, теплоотдача в окружающую среду и прочее, то число независимых параметров, участвующих в расчетах тепловых процессов при сварке, может быть довольно значительным. Нагрев и охлаждение при сварке вызывает в материале изделия разнообразные физические и химические процессы – плавление, кристаллизацию, структурные превращения, сопровождающиеся появлением напряжений, пластических деформаций и пр. Чтобы определить характер протекания этих процессов, необходимо знать распределение температур в материале изделия и его изменение во времени.

При сварке передача тепла в твердых телах осуществляться вследствие теплопроводности металлов. С поверхности металлов теплота передается посредством конвекции в окружающую среду, которая движется относительно поверхности, например, вследствие различной плотности нагретых и ненагретых зон, или в результате принудительной циркуляции жидкости или газа. При температуре поверхности выше 400-500 К основная часть теплоты отдается лучистым теплообменом, представляющим собой электромагнитные колебания. На практике основным механизмом передачи тепла при сварке является теплопроводность – молекулярный перенос тепла в сплошной среде вследствие неравномерного распределения температур при обмене энергией между молекулами, атомами или свободными электронами. Теплопроводность зависит от агрегатного состояния вещества, его состава, чистоты, температуры, давления и других характеристик.

Существующие эмпирические и аналитические модели протекания

тепловых процессов при сварке основаны на решении дифференциального уравнения теплопроводности при условии независимости теплофизических свойств от температуры, с учетом всевозможных допущений и упрощений как свариваемых тел так и тепловых источников, что вносит неточности в расчеты. Такие модели, как правило, справедливы только для конкретных диапазонов параметров сварки, изменение которых предполагает проведение большого комплекса исследований.

Применение численных методов позволяет точно воспроизвести геометрические условия однозначности, задающие размеры и форму свариваемых деталей, граничные условия, разрешать нелинейные задачи теплопроводности с учётом фазовых переходов, температурной зависимости теплофизических свойств материала.

Численное моделирование процессов теплообмена в настоящее время приобретает все более значительную роль в связи с необходимостью достоверного прогноза таких процессов, экспериментальное изучение которых в лабораторных или натурных условиях очень сложно и дорого, а в некоторых случаях просто невозможно.

Основные понятия и определения, используемые в расчетах тепловых процессов при сварке

Температура характеризует степень нагретости тела и представляет собой одну из важнейших тепловых величин. В шкале Кельвина нижней границей температурного промежутка служит точка абсолютного куля. Абсолютная температура выражается в Кельвинах (1 К = 1°С). Температура таяния льда соответствует 273,16 К.

Всякое физическое явление, в том числе и процесс теплопередачи происходит в пространстве и времени, поэтому задача исследования тепловых процессов в сварке сводится к изучению пространственно-временного изменения основной физической величины – температуры, то есть нахождения зависимости:

$$T = f(x, y, z, t), \quad (1)$$

где x, y, z, пространственные координаты в декартовой системе, t – время.

Совокупность мгновенных значений температуры во всех точках тела называется *температурным полем*. Нестационарным температурным полем называется такое поле, температура которого изменяется не только в пространстве, но и с течением времени. Стационарным температурным полем называется такое поле, температура которого в любой его точке не изменяется во времени, т. е. является функцией только координат:

$$T = f(x, y, z),\ \partial T / \partial t = 0. \quad (2)$$

В некоторых задачах нестационарное температурное поле переходит асимптотически в стационарное, когда $t \to \infty$. Температурное поле, соответствующее уравнению (1) или (2), является пространственным (трехмерным), так как T есть функция трех координат. Если температура есть функция двух координат, то поле называется двухмерным

Если же температура есть функция одной координаты, то поле называется одномерным:

$$T = f(x, t),\ \partial T / \partial y = 0,\ \partial T / \partial z = 0. \quad (3)$$

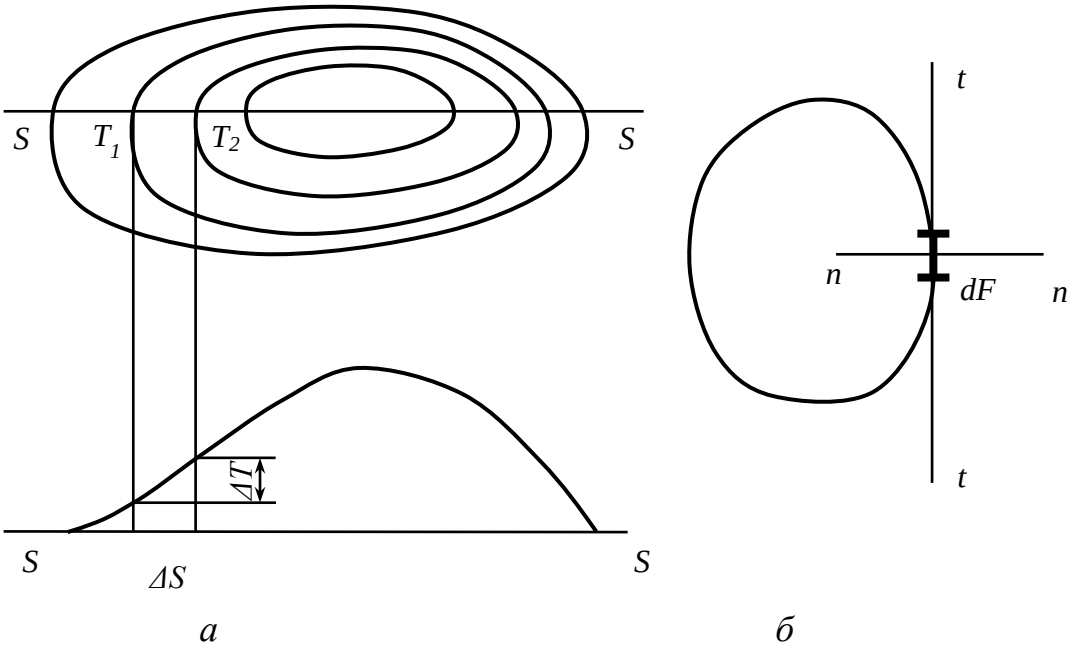
Примером одномерного температурного поля может служить поле неограниченной пластины (пластина, ширина и длина которой очень велики по сравнению с толщиной) при распространении тепла перпендикулярно к ее поверхности.

Если точки поля, имеющие одинаковую температуру, соединить, то получим изотермическую поверхность. Пересечение изотермической поверхности плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм (линии, соответствующие одинаковой температуре).

Изотермической поверхностью или изотермической линией называется геометрическое место точек тела, имеющих одинаковую температуру. От точки к точке температура тела может изменяться. Изменение температуры в направлении *SS* на длине бесконечно малого отрезка d*S* называется *градиентом температуры* в рассматриваемой точке по данному направлению *SS*:

$$\text{grad}\, T_{SS} = \delta T / \delta S. \qquad (4)$$

Градиент температуры в точке максимален по направлению нормали *nn* к изотерме (рис. 1).



а *б*

Рис. 1. Изображение температурного поля изотермами:
а – изменение температуры по направлению *SS*;
б – касательная *tt* по нормали *nn* к изотерме

Скорость изменения температуры в данной точке поля с координатами x_0, y_0, z_0 в данный момент времени t_0 выражается частной производной от температуры по времени $\delta T/\delta t$.

Количество теплоты Q измеряется в джоулях (Дж). Одна международная калория равна 4,1868 Дж.

Удельное количество теплоты (теплосодержание) h выражает количество теплоты, сообщенное телу массой 1 г, при нагреве его от температуры T_1 до температуры T_2. При технических расчетах теплосодержание тела отсчитывают обычно от нормальной температуры (293 К), а не от абсолютного нуля. Вне критических точек теплосодержание в металлах с ростом температуры возрастает монотонно. В критических точках, соответствующих аллотропическим и фазовым превращениям, происходящим с поглощением или выделением теплоты, оно изменяется скачкообразно.

Удельная теплота фазового превращения l определяется, как количество теплоты, поглощаемой или выделяемой единицей массы материала при изотермическом процессе фазового превращения.

Истинная удельная массовая теплоемкость c есть количество теплоты, необходимое для изменения на один кельвин температуры единицы массы тела. В расчетах часто используют среднюю удельную массовой теплоемкостью в данном интервале температур от T_1 до T_2:

$$c_m = (h_2 - h_1)/(T_2 - T_1). \quad (5)$$

В расчетах может использоваться истинная C и средняя C_m удельная объемная теплоемкость, которая связана с массовой удельной теплоемкостью следующими соотношениями:

$$C = c\rho;\ C_\text{m} = c_\text{m}\rho, \quad (6)$$

где ρ – плотность тела в нормальных физических условиях.

Закон теплопроводности Фурье

В общем случае передача тепловой энергии может осуществляться тремя способами: теплопроводностью, конвекцией, лучистой энергией (радиацией).

Для передачи теплоты в твердых телах характерен первый способ.

В жидкостях теплота передается конвекцией и теплопроводностью; в газах – в основном конвекцией и радиацией; в вакууме – только радиацией. Закон теплопроводности устанавливает количественную связь между теплопроводностью металла, градиентом температуры и тепловым потоком в твердом теле.

Рассмотрим передачу теплоты в стержне, температура по длине которого переменна (рис. 2). Очевидно, теплота будет перетекать от более нагретых к менее нагретым участкам. *Закон Фурье* в этом случае звучит так – количество теплоты dQ, протекающее вследствие теплопроводности за время dt через поперечное сечение F, пропорционально градиенту температуры dT/dx в рассматриваемом сечении, площади сечения F и времени dt;

$$dQ = \lambda(-dT/dx)Fdt. \qquad (7)$$

Знак минус в формуле (7) означает, что поток теплоты направлен в сторону, противоположную возрастанию температуры. Коэффициент пропорциональности λ называется *коэффициентом теплопроводности*.

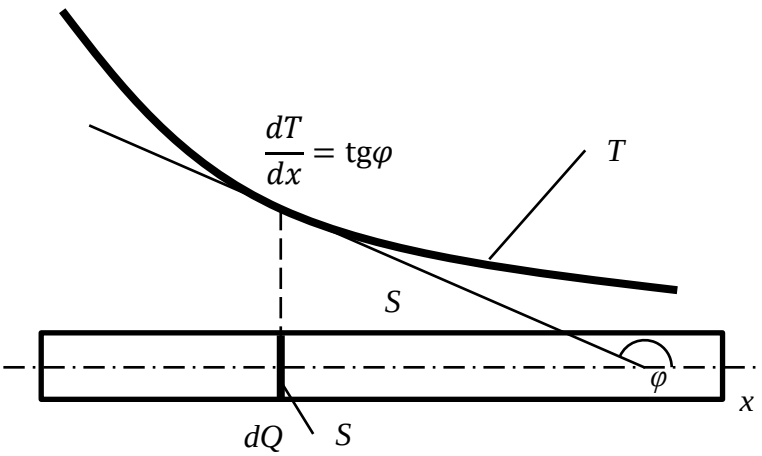


Рис. 2. Распределение температуры в стержне

Тепловой поток – это количество теплоты, проходящее через рассматриваемое сечение (поверхность) в единицу времени:

Удельный тепловой поток определяется тепловым потоком, приходящимся на единицу площади.

Теплопроводность λ характеризует способность тел проводить теплоту. Численно коэффициент λ выражает количество теплоты, протекающее через единицу изотермической поверхности в единицу времени, если изменение температуры по направлению нормали составляет 1К на 1см. Теплопроводность металла существенно изменяется в зависимости от температуры и химического состава материала.

Дифференциальное уравнение теплопроводности.

Закон теплопроводности Фурье устанавливает связь между теплопроводностью металла, градиентом температуры и тепловым потоком.

Для вычисления температуры точек тела необходимо не установить тепловой поток, проходящий через рассматриваемое сечение, но и определить количество теплоты, которое поступает в некоторый элементарный объем тела, а также уходит из этого объема.

Если количество теплоты в этом объеме увеличивается, то температура его повышается, и наоборот. Сложный процесс изменения температуры точек тела с координатами *x, y, z* во времени *t* описывается дифференциальным уравнением теплопроводности.

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности рассмотрим на примере линейного распространения теплоты в стержне (рис. 3).

Вследствие наличия градиента температуры теплота в стержне с сечением F на рассматриваемом участке будет распространяться слева направо.

Согласно закону Фурье, удельный тепловой поток в каждом сечении:

$$q_{2x} = -\lambda\, \partial T / \partial x. \qquad (8)$$

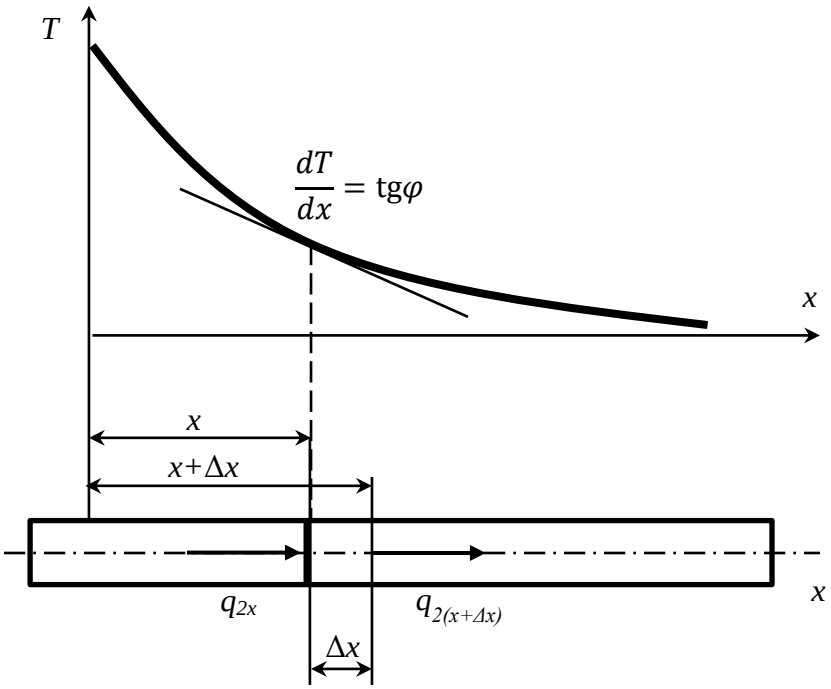


Рис. 3. К выводу уравнения теплопроводности

Приращение удельного теплового потока dq_{2x} на длине dx составит:

$$q_{2x} = \frac{\partial q_{2x}}{\partial x} dx = \frac{\partial q_{2x}}{\partial x} (-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) dx. \quad (9)$$

Это означает, что слева через сечение *I–I*, где градиент температуры несколько выше, входит больше теплоты, чем выходит через сечение *II –II*, где градиент температуры меньше. За время *dt* в элементарном объеме *Fdx* накапливается количество теплоты:

$$dQ_x = q_{2x} dtF - q_{2(x+dx)} dtF = -dq_{2x} Fdt. \quad (10)$$

Теплота dQ_x повышает температуру элементарного объема с теплоемкостью *c*р на $dT = (\partial T/\partial t)dt$:

$$dQ_x = c\rho F dx(\partial T/\partial t)dt. \quad (11)$$

Приравнивая выражения (10) и (11), а также используя уравнение (9) находим:

$$c\rho F\, \partial T/\partial t = \lambda F(\partial^2 T/\partial x^2) \quad (12)$$

Сокращая, получим частный случай дифференциального уравнения теплопроводности для стержня:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad (13)$$

В общем случае трехмерного тела при отсутствии теплообмена с окружающим пространством общее уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \alpha\nabla^2 T, \qquad (14)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа; $\alpha = \lambda/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности, см^2/с.

В дифференциальных уравнениях (13) и (14) T означает температуру или приращение температуры в точке равномерно нагретого тела. Если начальная температура тела равномерна и равна T_0, то полное значение температуры T равно $T_0+\Delta T$, где ΔT приращение температуры.

Решения уравнений (13) и (14) дают разнообразные случаи распределения температуры в телах. При выводе указанных уравнений предполагалось, что коэффициенты λ, cρ и α постоянны. Учет зависимости этих коэффициентов от температуры приводит к нелинейным дифференциальным уравнениями, что чрезвычайно усложняет получение решения аналитическими методами. Для технических целей в ряде случаев точность решения оказывается достаточной, если выбирать средние значения коэффициентов диапазоне температур, характерном для рассматриваемого процесса.

Уравнение (14) устанавливает связь между временным и пространственным изменением температуры в любой точке тела и описывает множество вариантов развития процессов теплопроводности. Чтобы из бесчисленного количества этих вариантов выбрать один и дать его полное математическое описание, необходимы условия однозначности, которые содержат геометрические, физические, начальные и граничные условия.

Геометрические условия определяют форму и размеры тела, в котором протекает изучаемый процесс. Физические условия определяют теплофизические характеристики тела λ, ρ, c. Временные (начальные) условия

содержат распределение температуры в теле в начальный момент времени:

$$t = 0,\ T = f(x, y, z)$$

При равномерном распределении температуры в теле начальное условие упрощается: $t = 0$: $T = T_0$= const. Граничные условия определяют особенности протекания процесса на поверхности тела и могут быть заданы несколькими способами.

– *граничные условия первого рода* – задается распределение температуры на поверхности (или границе) тела для каждого момента времени. $T=T_w(x, y, z)$. В большинстве случаев T_w=const.

– *граничные условия второго рода* – задается значение теплового потока для каждой точки поверхности (или границы) тела в любой момент времени:

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right)_w = q_w(x, y, z, t)$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности тела. Наиболее часто используется условие q_w=const.

– *граничные условия третьего рода* – задается взаимосвязь между потоком тепла за счет теплопроводности от твердой стенки и тепловым потоком из окружающей среды за счет температурного напора (закон Ньютона - Рихмана):

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right)_w = \alpha(T_w - T^e)$$

где a – коэффициент теплообмена.

– *граничные условия четвертого рода* – для определения теплового взаимодействия между элементами, имеющими различные теплофизические характеристики, задают условия равенства температур и тепловых потоков по обе стороны от границы раздела:

$$\begin{cases} -\lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right)_\Gamma = -\lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right)_\Gamma; \\ T_1(x_\text{г}, y_\text{г}, z_\text{г}, t) = T_2(x_\text{г}, y_\text{г}, z_\text{г}, t). \end{cases}$$

где $x_г, y_г, z_г, t$ – координаты границы раздела сред; T_1, T_2 – температуры соприкасающихся сред.

Дифференциальное уравнение (14) вместе с условиями однозначности дает полную математическую формулировку краевой задачи теплопроводности.

Для расчетов процесса распространений тепла наряду с аналитическим применяют численные методы. Твердое тело представляется в виде совокупности узлов, а дифференциальное уравнение заменяют приближенным выражением, связывающим не бесконечно малые, а небольшие конечные приращения температур времени и длины. То есть вместо производных в дифференциальном уравнении используются их конечноразностные аппроксимации. При этом получают систему линейных алгебраических уравнений для определения температуры, как локальной характеристики в каждом узле сетки. Полученная система является незамкнутой, для ее замыканию используют разностное представление граничных условий. В результате получают замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, которую решают численными методами.

Одномерное уравнение теплопроводности

В качестве примера рассмотрим краевую задачу на основе одномерного уравнения теплопроводности. Анализируется теплопередача через плоскую бесконечную пластину или изолированный стержень (рис. 4). На одном торце стержня поддерживается постоянная температура $T_л$, на другом – температура $T_п$. Начальная температура равна T_0, источники тепловыделения внутри стержня отсутствуют.

При заданных условиях температура будет изменяться только в направлениях, перпендикулярных сечению стержня. Если ось О*x* направ-

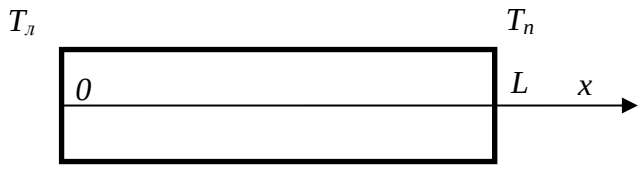


Рис. 4. Геометрия задачи

вить, как показано на рис. 1, то температура в направлении *Oy* и *Oz* может считаться постоянной. Также предположим, что теплофизические характеристики не зависят от температуры. В связи с этим дифференциальное уравнение (1.14) преобразуется к виду:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0 < x < L. \qquad (15)$$

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} t = 0: T = T_0, 0 \le x \ge L; \\ x = 0: T = T_л, t > 0; \\ x = L: T = T_п, t > 0. \end{gathered} \qquad (16)$$

Для того чтобы дать полное математическое описание рассматриваемой задачи, необходимо еще задать физические условия однозначности.

Эту задачу будем решать методом конечных разностей на равномерной сетке. Для этого разобьем пластину по толщине на *N-1* равных промежутков, т.е. построим конечно-разностную сетку (рис. 5):

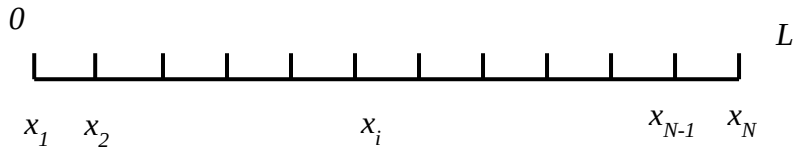


Рис. 5. Конечно-разностная сетка:
$x_1, x_2,..., x_{N-1}$ – координаты внутренних узлов;
x_1, x_N – координаты граничных узлов

Определим значение температуры в i-м узле в момент времени $t = t_n = n \cdot \tau$ как $T(x_i;, t_n) = T_i''$. Здесь τ – шаг интегрирования по временной координат, n – номер шага по времени.

Далее заменим дифференциальные операторы в (15) на их конечно-разностные аналоги. Будем пользоваться *неявной схемой*.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

В результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$c\rho \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right),\ i = 2, \dots, N-1,\ n \geq 0. \qquad (17)$$

Выбранную схему аппроксимации частных производных можно графически представить следующим образом:

На рис. 6 показано, что используется четырехточечная разностная схема – три точки берутся на новом временном слое и одна со старого временного слоя.

Сформулированный выше способ аппроксимации производных называется неявным потому, что поле температуры на новом временном слое представлено неявно, т.е. для его определения необходимо решать

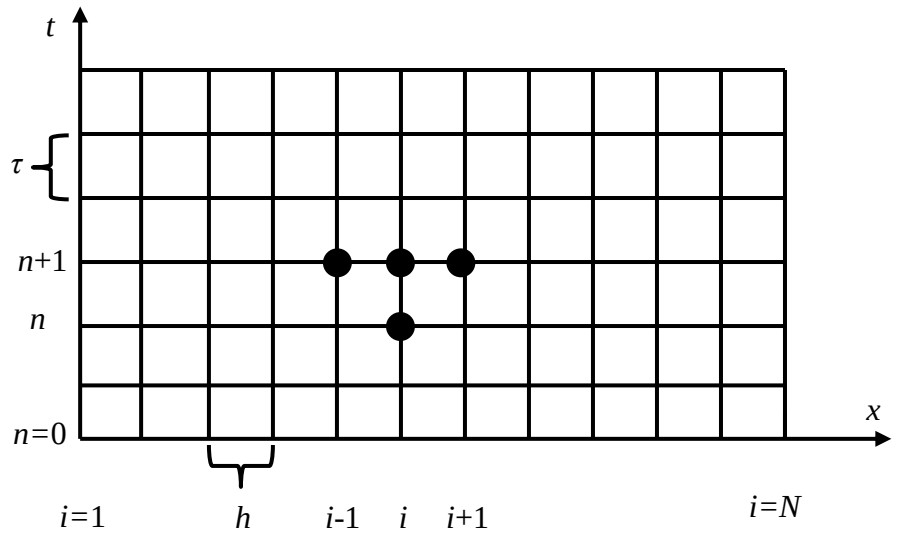


Рис. 6. Шаблон неявной четырехточечной разностной схемы

систему уравнений (17).

Полученную систему можно свести к наиболее общему виду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i, \qquad (18)$$

где $A_i = C_i = \frac{\lambda}{h^2}$, $B_i = \frac{2\lambda}{h^2} + \frac{c\rho}{\tau}$, $F_i = -\frac{c\rho}{\tau} T_i^n$.

Такие уравнения называют трехточечными разностными уравнениями второго порядка. Система (18) имеет трехдиагональную структуру. В связи с тем, что рассматривается нестационарная задача, систему (18) необходимо решать на каждом шаге по времени.

Предположим, что существуют такие наборы чисел α_i и β_i (i = 1,2 ... *N-1),* при которых:

$$T_i^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, \qquad (19)$$

т.е. трехточечное уравнение второго порядка (18) преобразуется в двухточечное уравнение первого порядка (19). Уменьшим в связи с (19) индекс на единицу и полученное выражение $T_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + \beta_{i-1}$, подставим в данное уравнение (18):

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + C_i \beta_{i-1} = F_i,$$

откуда получаем:

$$T_i^{n+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} T_{i+1}^{n+1} + \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}.$$

Последнее равенство имеет вид (19) и будет точно с ним совпадать, если при всех i = 2,3,...,N-1 выполняются соотношения:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}},\ \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}. \qquad (20)$$

Для определения α_i и β_i необходимо знать α_1 и β_1 которые находятся из левого граничного условия.

Далее по формулам (19) последовательно находятся $T_{N-1}^{n+1}, T_{N-2}^{n+1} \ldots, T_2^{n+1}$, при условии, что T_N^{n+1} найдено из правого граничного условия.

Таким образом, решение уравнений вида (18) описываемым способом, называемым методом прогонки, сводится к вычислениям по трем формулам: нахождение так называемых прогоночных коэффициентов α_i и β_i по формулам (20) i = 2,3,...,N-1 (прямая прогонка) и затем получение неизвестных T_i^{n+1} по формуле (19) при i = N-1, N-2,...,2 (обратная прогонка).

Для успешного применения метода прогонки нужно, чтобы в процессе вычислений не возникло ситуаций с делением на нуль, а при больших размерностях систем не должно быть быстрого роста погрешностей округлений.

Будем называть прогонку корректной, если знаменатели прогоночных коэффициентов (20) не обращаются в нуль, и устойчивой, если $|\alpha_i| < 1$ при всех $i = \overline{1, N-1}$.

Возвращаясь к системе (17), определим прогоночные коэффициенты и воссоздадим полный алгоритм решения полученной системы.

Поскольку при $x = 0$ $T = T_л$,

то

$$T_i^{n+1} = \alpha_1 T_2^{n+1} + \beta_1 = T_л,$$

$$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = T_л$$

а при

$$x = L \qquad T = T_п$$

$$T_N^{n+1} = T_n.$$

Прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам (20). Таким образом, разностные соотношения, аппроксимирующие дифференциальную задачу (15), (16), имеют следующий вид:

$$c\rho \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right),\ i = 2, \dots, N-1,\ n \geq 0. \qquad (21)$$

$$T_i^0 = T_0, i = 2, \dots, N-1;$$

$$T_1^n = T_л, n > 0; \qquad (22)$$

$$T_1^n = T_п, n > 0.$$

Аппроксимация дифференциальной задачи (15), (16) конечно-разностной (21), (22) выполнена с первым порядком точности по времени t и вторым по пространственной координате h.

При этом неявная разностная схема является абсолютно устойчивой, т.е. можно проводить интегрирование краевой задачи (15), (16) с любым разностным шагом по времени.

Блок-схема к рассматриваемой задаче представлена на рис. 7.

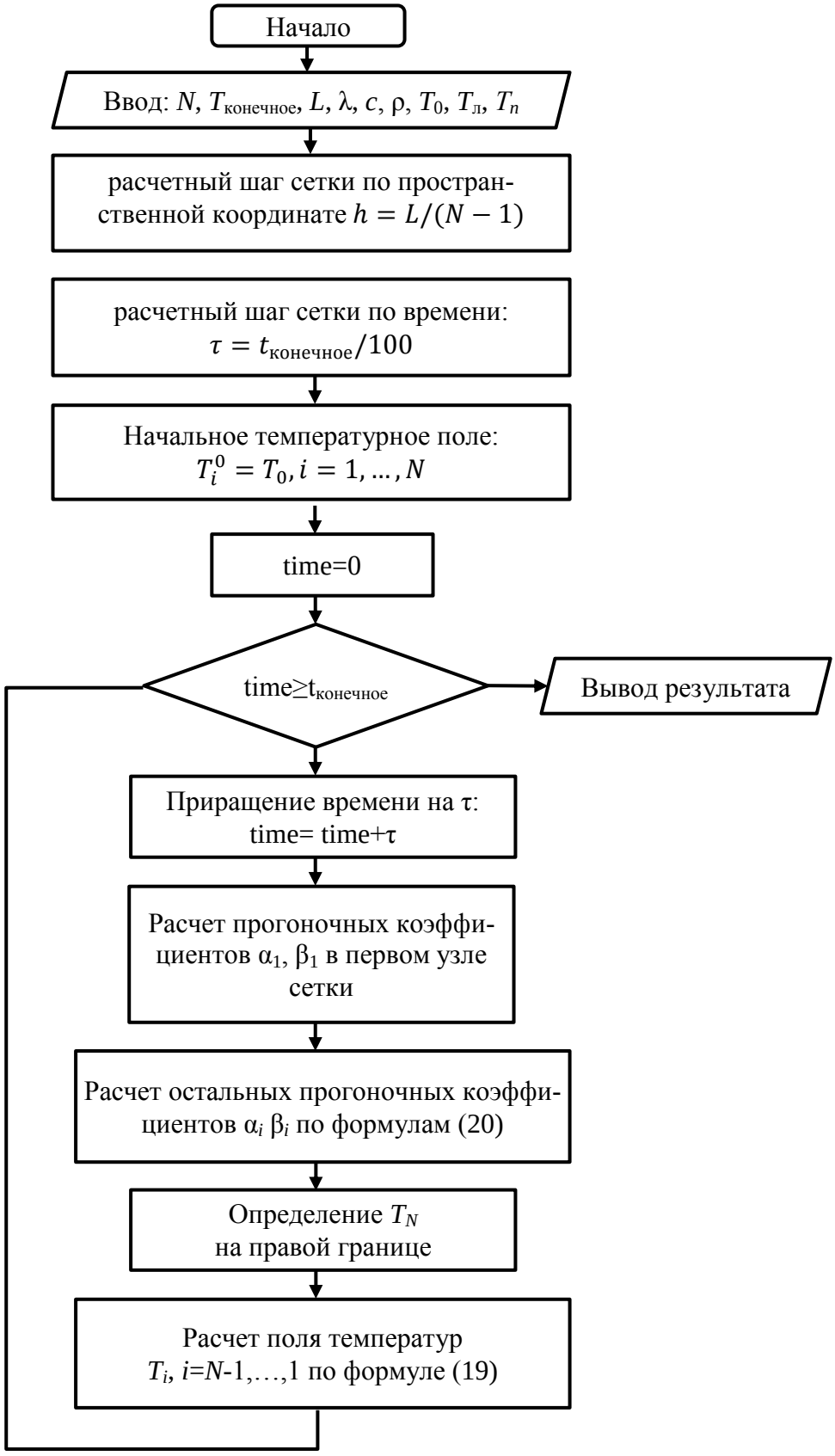


Рис. 7. Блок-схема к рассматриваемой задаче (неявная схема)

Листинг программы (на языке VBA) реализующей алгоритм расчета (неявная схема)

```
Private Sub determ()
'Описание используемых переменных
Const mf = 1000
Dim T(1 To mf) As Single
Dim alfa(1 To mf) As Single
Dim beta(1 To mf) As Single
Dim i, j, N As Single
Dim ai, bi, ci, fi As Single
Dim lamda, ro, c, h, tau As Single
Dim T1, T0, Tr, L, t_end, time As Single
'Ввод исходных данных
N = CSng(TextBox1.Text)
t_end = CSng(TextBox2.Text)
L = CSng(TextBox3.Text)
lamda = CSng(TextBox4.Text)
ro = CSng(TextBox5.Text)
c = CSng(TextBox6.Text)
T0 = CSng(TextBox7.Text)
T1 = CSng(TextBox8.Text)
Tr = CSng(TextBox9.Text)
'шаг сетки по пространственной координате
h = L / (N - 1)
'расчетный шаг сетки по времени
tau = t_end / 100
'Определяем поле температур в начальный момент времени
For i = 1 To N
T(i) = T0
Next i
```

```
'Интегрируем нестационарное уравнение теплопроводности
time = 0
While time < t_end
time = time + tau
'Определяем начальные прогоночные коэффициенты на
'основе левого граничного условия
alfa(1) = 0
beta(1) = T1
'Определяем прогоночные коэффициенты
For i = 2 To N - 1
ai = lamda / h ^ 2
bi = 2 * lamda / h ^ 2 + ro * c / tau
ci = lamda / h ^ 2
fi = -ro * c * T(i) / tau
alfa(i) = ai / (bi - ci * alfa(i - 1))
beta(i) = (ci * beta(i - 1) - fi) / (bi - ci * alfa(i - 1))
Next i
'Определяем значение температуры на правой границе
T(N) = Tr
'Определяем поле температур
For i = (N - 1) To 1 Step -1
T(i) = alfa(i) * T(i + 1) + beta(i)
Next i
Wend
'Записываем результаты T(i) в таблицу Excel
Dim s As String                    'пользовательская переменная
Dim v_Excel As Excel.Application   'область памяти приложения Excel
Dim v_Wb1 As Excel.Workbook        'область рабочей книги
Dim sh As Excel.Worksheet          'область рабочего листа
'Открываем новое приложение Excel
```

```
Set v_Excel = New Excel.Application
'Загружаем рабочую книгу
Set v_Wb1 = v_Excel.Workbooks.Open("C:\temp.xlsx")
'Загружаем рабочий лист 1
Set sh = v_Excel.Sheets(1)
'Получаем доступ к рабочей книге
v_Wb1.Activate
'Записываем рассчитанные значение температур в таблицу
For i = 1 To N
sh.Cells(i, 1).Value = i * h
sh.Cells(i, 2).Value = T(i)
Next i
'Закрытие приложения Excel
v_Excel.Quit
Set v_Excel = Nothing
End Sub
```

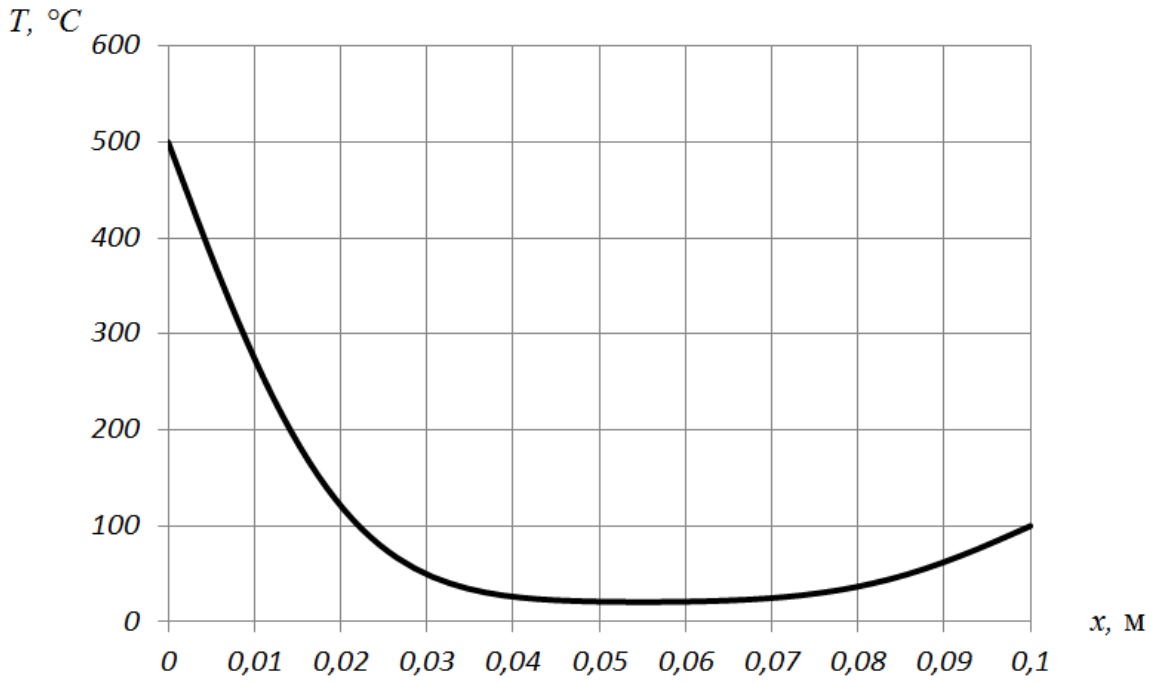


Рис. 8. Распределение температуры по длине стержня в момент времени t = 10 с (с использованием неявной разностной схемы)

Результаты расчетов при L = 0,1 м, λ= 46 Вт/(м °С), ρ= 7800 кг/м^3, c = 460 Дж/(кг °С), T_0=20 °С, $T_л$ = 500 °С, $T_п$ = 50°С через 10 с процесса нагрева приведены на рис. 8.

Как отмечалось выше, рассмотренная расчетная схема является неявной, т.е. для определения поля температуры приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Но помимо предложенной схемы существует также и явная схема. В такой схеме явно определяется поле температуры и не нужно решать систему уравнений для определения прогоночных коэффициентов α_i и β_i.

Рассмотрим ту же задачу, но уже с использованием явной схемы.

Отличие явной схемы от неявной заключается в аппроксимации диффузионного слагаемого, а именно, во временном слое на котором рассматривается неизвестное поле температуры:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}.$$

Таким образом, в результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получаем следующее соотношения для определения поля температуры:

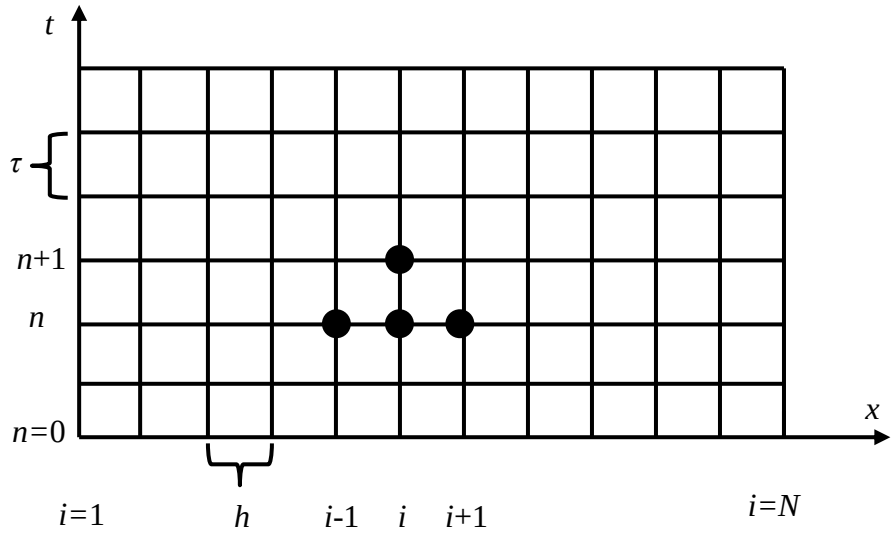


Рис. 9. Шаблон явной четырехточечной разностной схемы

$$c\rho \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \right),\ i = 2, \dots, N-1,\ n \geq 0.$$

Графически явную разностную схему можно представить следующим образом:

Из шаблона (рис. 9) видно, что для определения неизвестного поля температуры никакой системы уравнений для α_i и β_i решать не требуется:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\lambda\tau}{c\rho} \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \right),\ i = 2, \dots, N-1,\ n \geq 0. \qquad (23)$$

и аналогичные разностные аналоги краевых условий:

$$T_i^0 = T_0, i = 2, \dots, N-1;$$
$$T_1^n = T_л, n > 0; \qquad (24)$$

$$T_1^n = T_{\text{п}}, n > 0.$$

Таким образом, мы получили простую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения распределения температуры в пластине в различные моменты времени. Аппроксимация дифференциальной задачи (15), (16) конечно-разностной (23), (24) выполнена также с первым порядком по времени *t* и вторым по пространственной координате *h*. Но чтобы решение конечно-разностной задачи (23), (24) сходилось к решению дифференциальной задачи, достаточно выполнение следующего условия (условие устойчивости разностной схемы):

$$\tau = \frac{\rho c h^2}{2\lambda}.$$

Из этого условия определяется шаг интегрирования по временной координате.

Конечно-разностный аналог уравнения (23) называется простой явной схемой решения дифференциального уравнения теплопроводности, т.к. в уравнение входит всего одно неизвестное и оно может быть выражено через уже известные величины. Решение уравнения (23) представляет собой маршевую задачу, поэтому начальное распределение T_i^0 должно быть задано, и значения функции *T* на *n*-временном шаге можно считать известным. Погрешность аппроксимации уравнения (23) представляет собой разность между исходным уравнением в частных производных и его конечно-разностным аналогом. Порядок погрешности аппроксимации для явной схемы равен:

$$O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$$

или

$$O[\Delta t(\Delta x)^2].$$

Из анализа устойчивости простой явной схемы следует, что она абсолютно устойчива, т.е. обеспечивает сходимость решения конечно-разностных уравнений к решению уравнения в частных производных, при условии:

$$0 \le r \le 1/2, \text{ где } r = a\frac{\tau}{h^2}$$

Это условие накладывает ограничение на соотношение шагов по времени и по пространственной координате. Для двумерного уравнения теплопроводности условие устойчивости будет:

$$0 \le r_x + r_y \le 1/2,$$

т.е. для двумерного случая эффективный шаг по времени оказывается меньше.

И в том, и в другом случае при расчете следует предпочитать меньшие значения r, т.к. при r=1/2 простой явный метод решения характеризуется существенной диссипацией при больших значениях параметра β:

$$\beta = k_m h,\ k_m = \frac{m\pi}{L},$$

где m – число отрезков длины h, помещающихся на участке L.

Это означает, что амплитуда точного решения на каждом шаге по времени уменьшается в $e^{-r\beta^2}$.

Таким образом, явная разностная схема является условно устойчивой и требует специальных мероприятий по оценке возможности ее использования. Блок-схема к рассматриваемой задаче (явная схема) показана на рис. 10.

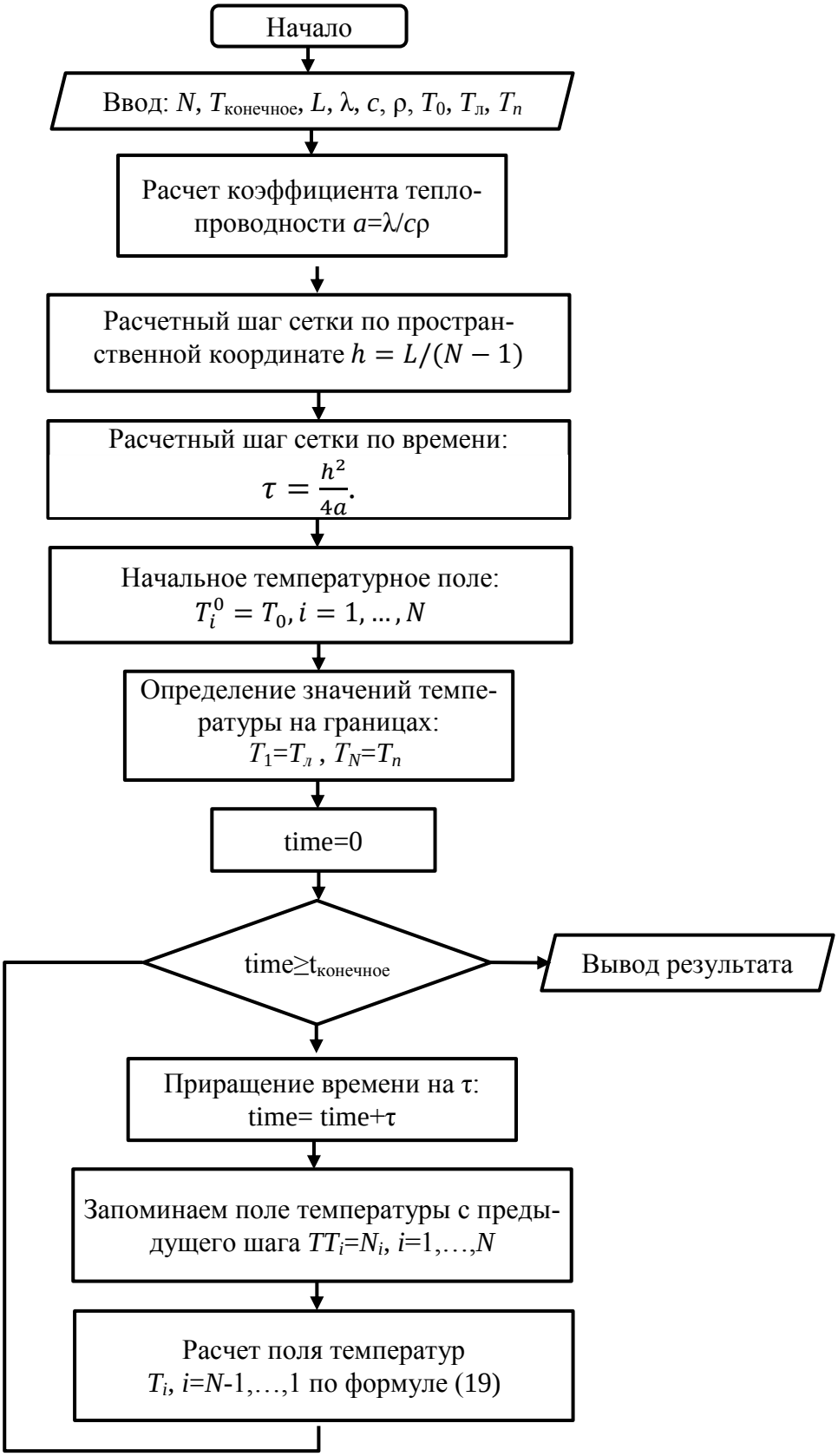


Рис. 10. Блок-схема к рассматриваемой задаче (явная схема)

Листинг программы (на языке VBA) реализующей алгоритм расчета (неявная схема)

```
Private Sub determ()
'Описание используемых переменных
Const mf = 1000
Dim T(1 To mf) As Single
Dim TT(1 To mf) As Single
Dim i, j, N As Single
Dim a, lamda, ro, c, h, tau As Single
Dim T1, T0, Tr, L, t_end, time As Single
'Ввод исходных данных
N = CSng(TextBox1.Text)
t_end = CSng(TextBox2.Text)
L = CSng(TextBox3.Text)
lamda = CSng(TextBox4.Text)
ro = CSng(TextBox5.Text)
c = CSng(TextBox6.Text)
T0 = CSng(TextBox7.Text)
T1 = CSng(TextBox8.Text)
Tr = CSng(TextBox9.Text)
a = lamda / (ro * c) 'Коэффициент температуропроводности
h = L / (N - 1) 'Шаг сетки по пространственной координате
tau = 0.51 * h ^ 2 / a 'Расчетный шаг сетки из условия устойчивости
'Определяем поле температур в начальный момент времени
For i = 1 To N
T(i) = T0
Next i
'Определяем значения температур на границе
T(1) = T1
```

```
T(N) = Tr
'Интегрируем нестационарное уравнение теплопроводности
time = 0
While time < t_end
time = time + tau
'Запоминаем температурное поле на предыдущем временном слое
For i = 1 To N
TT(i) = T(i)
Next i
'Определяем неизвестное температурное поле по формуле (1.23)
For i = 2 To N - 1
T(i) = TT(i) + a * tau / h ^ 2 * (TT(i + 1) - 2 * TT(i) + TT(i - 1))
Next i
Wend
'Записываем результаты T(i) в таблицу Excel
Dim s As String                    'пользовательская переменная
Dim v_Excel As Excel.Application   'область памяти приложения Excel
Dim v_Wb1 As Excel.Workbook        'область рабочей книги
Dim sh As Excel.Worksheet          'область рабочего листа
'Открываем новое приложение Excel
Set v_Excel = New Excel.Application
'Загружаем рабочую книгу
Set v_Wb1 = v_Excel.Workbooks.Open("C:\temp.xlsx")
'Загружаем рабочий лист 1
Set sh = v_Excel.Sheets(1)
'Получаем доступ к рабочей книге
v_Wb1.Activate
'Записываем рассчитанные значение температур в таблицу
For i = 1 To N
sh.Cells(i, 3).Value = i * h
```

```
sh.Cells(i, 4).Value = T(i)
Next i
'Закрытие приложения Excel
v_Excel.Quit
Set v_Excel = Nothing
End Sub
```

Результаты расчетов при L = 0,1 м, λ= 46 Вт/(м °С), ρ= 7800 кг/м^3, c = 460 Дж/(кг °С), T_0=20 °С, $T_л$ = 500 °С, $T_п$ = 100°С через 10 с процесса нагрева приведены на рис. 11.

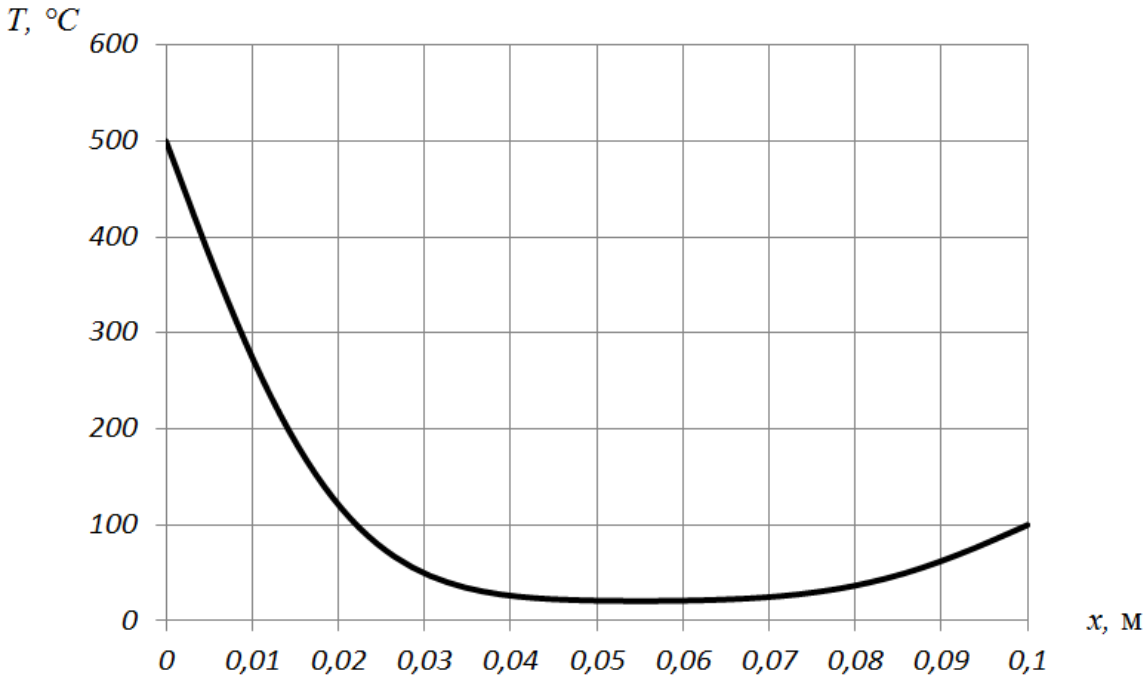


Рис. 11. Распределение температуры по длине стержня в момент времени t = 10 с (с использованием явной разностной схемы)

На практике часто возникают одномерные задачи с цилиндрической или сферической симметрией (рис. 12). Естественной системой координат в таких случаях является, соответственно, сферическая (r, φ) или цилиндрическая (r, θ, φ). Вследствие одномерности все величины не будут зависеть от углов θ, φ. Тогда уравнение (14) с переменными коэффициентами в соответствующих координатах примет вид:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^{\nu}\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

где r – радиальная координата, ν – показатель симметрии (0, 1, 2 соответственно для плоского, цилиндрического и сферического случаев).

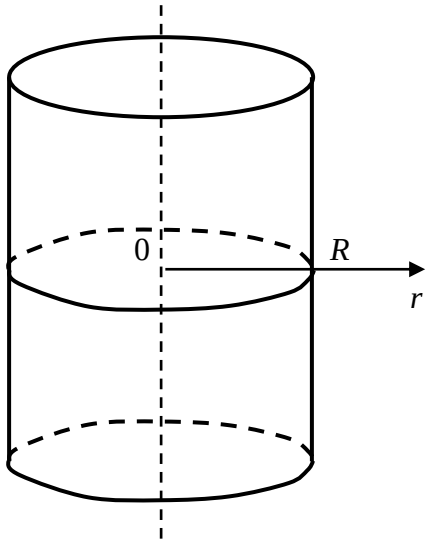


Рис. 12. Геометрия задачи распространения тепла в бесконечном цилиндре

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах.

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{25}$$

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} t = 0: T = T_0, 0 \le r \ge R; \\ r = 0: \frac{\partial T}{\partial r} = 0, t > 0; \\ x = R: T = T_n, t > 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Для решения сформулированной краевой задачи применим метод конечных разностей на основе неявной четырехточечной схемы. Сначала введем равномерную пространственную сетку:

$$r_i = (i-1)h, i = 1, \dots, N;$$

$$r_1 = 0, \dots, r_N = R;$$

$$h = R/(N-1).$$

Аналогично вводится временная сетка:

$$t_n = n\tau, n = 1, \dots, N;$$

$$t_0 = 0, \dots, t_M = t_{\text{конечное}}.$$

$$\tau > 0.$$

Заменим дифференциальные операторы в уравнении (25) на их конечно-разностные аналоги:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{h^2}\left[r_{i+\frac{1}{2}}T_{i+1}^{n+1} - \left(r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}}\right)T_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}}T_{i-1}^{n+1}\right].$$

где $r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_{i-1}+r_i}{2}$, $r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_i+r_{i+1}}{2}$.

Таким образом, в результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$c\rho\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{\lambda}{r_i h^2}\left[r_{i+\frac{1}{2}}T_{i+1}^{n+1} - \left(r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}}\right)T_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}}T_{i-1}^{n+1}\right],$$

$$i = 2, \dots, N-1, n = 0,1, \dots, M$$

Полученную систему можно свести к наиболее общему виду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i,$$

где

$$A_i = \frac{\lambda}{h^2}\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i}, B_i = \frac{\lambda}{h^2}\frac{r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i} + \frac{c\rho}{\tau}, C_i = \frac{\lambda}{h^2}\frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i}, F_i = -\frac{c\rho}{\tau}T_i^n.$$

Прогоночные коэффициенты находятся по формулам (20).

Далее неизвестное поле температуры определяется по выражению (19). Воспользуемся левым граничным условием для определения начальных прогоночных коэффициентов α_1и β_1из соотношения:

$$T_1 = \alpha_1 T_1 + \beta_1.$$

На левой границе стоит условие симметрии

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{r=0} = 0;$$

$$\frac{T_2 - T_1}{h} = 0;$$

$$T_1 = T_2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1; \\ \beta_1 = 0. \end{cases}$$

А на правой границе температура известна $T|_{r=R} = T_n$

Блок-схема к рассматриваемой задаче аналогична представленной на рис. 7.

Конечно-разностная аппроксимация граничных условий второго и третьего рода

Граничные условия второго рода (заданы тепловые потоки q_1 и q_2, рис. 13), можно сформулировать следующим образом:

$$x = 0: \; -\frac{\partial T}{\partial x} = q_1, \;\; t > 0;$$
$$x = L: \; -\frac{\partial T}{\partial x} = q_2, \;\; t > 0. \qquad (27)$$

Из соотношения (27):

$q_1 > 0$ => на границе $x = 0$ происходит нагрев материала;

$q_1 < 0$ => на границе $x = 0$ происходит охлаждение материала;

$q_1 > 0$ => на границе $x = L$ происходит охлаждение материала;

$q_1 < 0$ => на границе $x = L$ происходит нагрев материала.

Проведем дискретизацию граничных условий II рода с погрешностью $O(h)$. Погрешность аппроксимации вида $O(h)$означает, что различия между точными значениями и полученными (приближенными) будут одного порядка с шагом по пространству h. Поскольку обычно $h < 1$, то погрешность будет тем меньше, чем выше порядок аппроксимации. Например, погрешность аппроксимации вида $O(h^2)$ дает результаты более точные, т.к. $h^2 < h < 1$.

Поскольку будем использоваться неявную разностную схему, то ле-

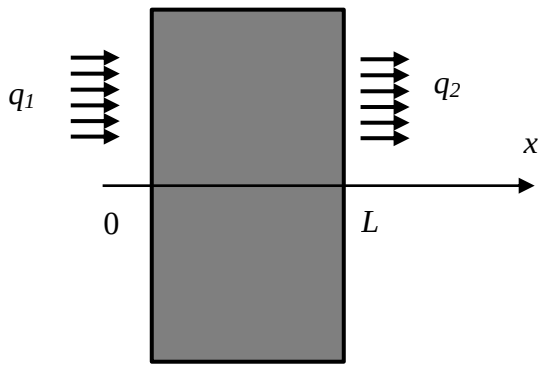


Рис. 13. Геометрия задачи (граничные условия второго рода)

вое граничное условие необходимо для определения первых прогоночных коэффициентов α_1 и β_1 из соотношения $T_1 = \alpha_1 T_2 + \beta_1$.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_1;$$

$$-\lambda \frac{T_2 - T_1}{h} = q_1;$$

$$T_1 = T_2 + \frac{hq_1}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1; \\ \beta_1 = \frac{hq_1}{\lambda}. \end{cases} \quad (28)$$

А правое граничное условие используют для определения температуры T_N.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L} = q_2;$$

$$-\lambda \frac{T_N - T_{N-1}}{h} = q_2;$$

$$T_N = T_{N-1} - \frac{hq_2}{\lambda}.$$

Так как $T_{N-1} = \alpha_{N-1} T_N + \beta_{N-1}$, то:

$$T_N = \alpha_{N-1} T_N + \beta_{N-1} - \frac{hq_2}{\lambda};$$

$$T_N = \frac{\lambda \beta_{N-1} - hq_2}{\lambda(1 - \alpha_{N-1})}. \quad (29)$$

Проведем дискретизацию граничных условий II рода с погрешностью $O(h^2)$. Предположим, что на границе выполняется уравнение теплопроводности (15):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (30)$$

Разложим функцию $T(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x=0 до членов второго порядка относительно h:

$$T_2^{n+1} = T_1^{n+1} + h \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_{x=0}^{n+1}.$$

Используя соотношение (30) получим:

$$T_2^{n+1} = T_1^{n+1} + h \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}^{n+1} + \frac{h^2}{2\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}\Big|_{x=0}^{n+1};$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}^{n+1} = \frac{T_2^{n+1}-T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2\alpha}\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{x=0}^{n+1} = \frac{T_2^{n+1}-T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2\alpha}\frac{T_1^{n+1}-T_1^{n}}{\tau} = -\frac{q_1}{\lambda}.$$

Тогда:

$$\frac{T_2^{n+1}-T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2\alpha\tau}T_1^{n+1} + \frac{h}{2\alpha\tau}T_1^{n} = -\frac{q_1}{\lambda}.$$

Или:

$$T_1^{n+1} = \frac{2\alpha\tau}{h^2+2\alpha\tau}T_2^{n+1} + \frac{h^2}{h^2+2\alpha\tau}T_1^{n} + \frac{2\alpha\tau h q_1}{\lambda(h^2+2\alpha\tau)}.$$

Таким образом:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\alpha\tau}{h^2+2\alpha\tau}; \\ \beta_1 = \frac{h^2}{h^2+2\alpha\tau}T_1^{n} + \frac{2\alpha\tau h q_1}{\lambda(h^2+2\alpha\tau)}. \end{cases} \quad (31)$$

Определим T_N используя правое граничное условие:

$$T_{N-1}^{n+1} = T_N^{n+1} - h\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=L}^{n+1} = T_N^{n+1} - h\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2\alpha}\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{x=L}^{n+1};$$

$$-\frac{q_2}{\lambda} = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}^{n+1} = \frac{T_N^{n+1}-T_{N-1}^{n+1}}{h} - \frac{h}{2\alpha}\frac{T_N^{n+1}-T_N^{n+1}}{\tau}.$$

Таким образом:

$$2\alpha\tau h T_N^{n+1} - 2\alpha\tau h T_{N-1}^{n+1} + h^2\lambda T_N^{n} + 2\alpha\tau h q_2 = 0,$$

т.к. $T_{N-1} = \alpha_{N-1}T_{N-1} + \beta_{N-1}$, то:

$$T_N^{n+1} = \frac{2\alpha\tau\lambda\beta_{N-1} - 2\alpha\tau h q_2 + h^2\lambda T_N^{n}}{\lambda h^2 + 2\alpha\tau\lambda(1-\alpha_{N-1})}. \quad (32)$$

Граничные условия третьего рода (если температуры окружающей среды T^{e1} и T^{e2} и коэффициенты теплоотдачи κ_1 и κ_2) можно сформулировать следующим образом:

$$x = 0, \quad -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_1(T^{e1} - T), \quad T > 0, \quad \kappa_1 > 0\,;$$

$$x = L, \quad -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_2(T^{e2} - T), \quad T > 0, \quad \kappa_2 > 0\,;$$

Проведем дискретизацию граничных условий III рода с погрешностью $O(h)$.

Определим первые прогоночные коэффициенты α_1 и β_1 из соотношения $T_1 = \alpha_1 T_2 + \beta_1$:

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \kappa_1(T^{e1} - T|_{x=0} \Rightarrow -\lambda\frac{T_2-T_1}{h} = \kappa_1(T^{e1} - T_1);$$

Введем обозначение $\frac{\kappa h}{\lambda} \equiv \mathrm{Bi}$, тогда:

$$T_1 - T_2 = \mathrm{Bi}_1 T^{e1} - \mathrm{Bi}_1 T_1;$$

$$T_1 = \frac{1}{1+\mathrm{Bi}_1} T_2 + \frac{\mathrm{Bi}_1}{1+\mathrm{Bi}_1} T^{e1};$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{1+\mathrm{Bi}_1} = \frac{\lambda}{\lambda+h\kappa_1}; \\ \beta_1 = \frac{\mathrm{Bi}_1}{1+\mathrm{Bi}_1} T_1^{e1} = \frac{h\kappa_1}{\lambda+h\kappa_1} T^{e1}. \end{cases} \quad (33)$$

Правое граничное условие используют для определения температуры T_N.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L} = \kappa_2 (T^{e2} - T|_{x=L} \Longrightarrow \lambda \frac{T_N - T_{N-1}}{h} = \kappa_2 (T^{e2} - T_N);$$

$$T_N (1 + \mathrm{Bi}_2) = T_{N+1} + \mathrm{Bi}_2 T^{e2};$$

$$T_N (1 + \mathrm{Bi}_2) = \alpha_{N-1} T_N + \beta_{N-1} + \mathrm{Bi}_2 T^{e2};$$

$$T_N = \frac{\lambda\beta_{N-1} + h\kappa_2 T^{e2}}{h\kappa_2 + \lambda(1-\alpha_{N-1})}. \quad (34)$$

Проведем дискретизацию граничных условий III рода с погрешностью $O(h^2)$. Предположим, что на границе выполняется уравнение теплопроводности (30). Далее по аналогии с аппроксимацией граничного условия II рода получим:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}^{n+1} = \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2\alpha} \frac{T_1^{n+1} - T_1^{n+1}}{\tau} = \frac{\kappa_1}{\lambda} T_1^{n+1} - \frac{\kappa_1}{\lambda} T^{e1}, \text{ т.к.}$$

$$T_1^{n+1} = \alpha_1 T_2^{n+1} + \beta_1,$$

то

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\alpha\tau}{h^2 + 2\alpha\tau(1+\mathrm{Bi}_1)}; \\ \beta_1 = \frac{h^2}{h^2 + 2\alpha\tau(1+\mathrm{Bi}_1)} T_1^n + \frac{2\alpha\tau \mathrm{Bi}_1 T^{e1}}{h^2 + 2\alpha\tau(1+\mathrm{Bi}_1)}. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\alpha\tau\lambda}{\lambda h^2 + 2\alpha\tau(\lambda+h\kappa_1)}; \\ \beta_1 = \frac{\lambda h^2 T_1^n + 2\alpha\tau h\kappa_1 T^{e1}}{\lambda h^2 + 2\alpha\tau(\lambda+h\kappa_1)}. \end{cases} \quad (35)$$

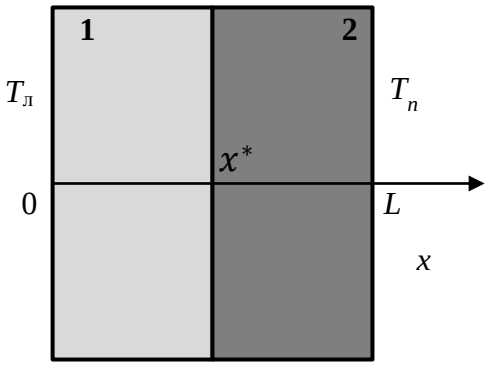


Рис. 14. Геометрия задачи (граничные условия IV рода).

Использование же правого граничного условия дает следующее соотношение:

$$T_N^{n+1} = \frac{h^2\lambda T_1^n + 2\alpha\tau(\beta_{N-1} + \mathrm{Bi}_2 T^{e2})}{h^2 + 2\alpha\tau(1 + \mathrm{Bi}_2 - \alpha_{N-1})} = \frac{\lambda h^2 T_N^n + 2\alpha\tau(\lambda\beta_{N-1} + h\kappa_2 T^{e2})}{\lambda h^2 + 2\alpha\tau(h\kappa_2 + \lambda(1-\alpha_{N-1})}. \quad (36)$$

Двухслойная пластина (граничные условия четвертого рода)

Проанализируем процесс теплопереноса в теле, представляющем собой совокупность двух пластин с различными теплофизическими характеристиками (см. рис. 14).

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} c_1\rho_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < x^*; \\ c_2\rho_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, x^* < x < L. \end{cases}$$

где индексы 1 и 2 соответствует левой и правой пластинам (см. рис. 14).

Начальные и граничные условия можно записать следующим образом:

$$t = 0: T = T_0, 0 \le x \le L;$$

$$x = 0: T = T_л, t > 0;$$

$$x = L: T = T_n, t > 0;$$

$$\begin{cases} T_1(t, x^*) = T_2(t, x^*), \\ -\lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t}\Big|_{x=x^*} = -\lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t}\Big|_{x=x^*} . \end{cases}$$

Для простоты на границах x=0 и x=L рассматриваются граничные условия первого рода. Граничное условие IV рода используется для определения прогоночных коэффициентов в точке x^*.

Алгоритм решения сформулированной краевой задачи можно представить следующим образом.

Сначала проводим аппроксимацию дифференциального уравнения конечными разностями, получаем систему линейных алгебраических уравнений вида (21), которую решаем методом прогонки. При нахождении прогоночных коэффициентов в области $0 \le x < x^*$ используем характеристики материала *1*, а при $x^* < x \le L$ – материала 2.

В точке же $x = x^*$ необходимо использовать граничное условие IV рода.

Выведем прогоночные коэффициенты в точке контакта двух сред.

$$\begin{cases} T_{1,i^*} = T_{2,i^*}, \\ -\lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t}\Big|_{x=x^*} = -\lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t}\Big|_{x=x^*} . \end{cases}$$

Рассмотрим аппроксимацию первого порядка относительно шага по пространственной координате (рис. 15). При этом, принимая во внимание

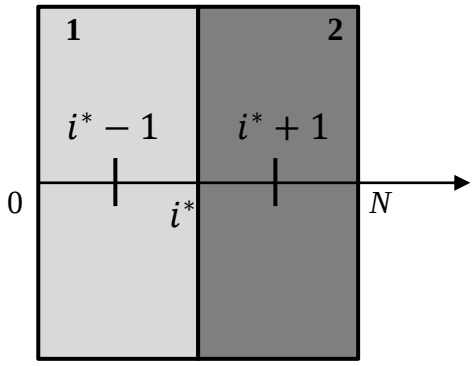


Рис. 15. Шаблон разностной сетки.

то, что при $i < i^*\ T = T_1$, а при $i > i^*\ T = T_2$ исключим в записи индексы, характеризующие среду. Получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} T_{1,i^*} = T_{2,i^*}, \\ -\lambda_1 \frac{T_{1,i^*} - T_{i^*-1}}{h} = -\lambda_2 \frac{T_{i^*+1} - T_{2,i^*}}{h}. \end{cases} \quad (37)$$

Введем обозначение $T_{1,i^*} = T_{2,i^*} \equiv T_{i^*}$.

Используя прогоночное соотношение $T_{i^*-1} = \alpha_{i^*-1} T_{i^*} + \beta_{i^*-1}$ из второго равенства условий (37) получим:

$$T_{i^*} - \alpha_{i^*-1} T_{i^*} - \beta_{i^*-1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} T_{i^*+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} T_{i^*}$$

или

$$T_{i^*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1(1-\alpha_{i^*-1})} T_{i^*+1} + \frac{\lambda_1 \beta_{i^*-1}}{\lambda_2 + \lambda_1(1-\alpha_{i^*-1})}.$$

Таким образом:

$$\begin{cases} \alpha_{i^*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1(1-\alpha_{i^*-1})}, \\ \beta_{i^*} = \frac{\lambda_1 \beta_{i^*-1}}{\lambda_2 + \lambda_1(1-\alpha_{i^*-1})}. \end{cases} \quad (38)$$

В случае же аппроксимации второго порядка относительно шага по пространственной координате получим:

$$\begin{cases} \alpha_{i^*} = \frac{2a_1 a_1 \tau \lambda_2}{2a_1 a_1 \tau(\lambda_2 + \lambda_1(1-\alpha_{i^*-1})) + h^2(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)}, \\ \beta_{i^*} = \frac{2a_1 a_1 \tau \lambda_1 \beta_{i^*-1} + h^2(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2) T_{i^*}^n}{2a_1 a_1 \tau(\lambda_2 + \lambda_1(1-\alpha_{i^*-1})) + h^2(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)}. \end{cases} \quad (39)$$

Блок-схема к рассматриваемой задаче имеет вид идентичный , изображенной на рис. 7, с тем исключением, что сначала находят прогоночные коэффициенты для первого материала по формулам (20), а на границе i^* используют соотношения (38) или (39), далее определяют прогоночные коэффициенты для второго материала по формулам (20).

Задача теплопроводности с внутренними источниками

Для примера рассмотрим нагревание металлического стержня диаметром d с удельным электрическим сопротивлением длиной L проходящим электрическим током I. Для простоты пренебрегаем теплоотдачей с поверхности стержня, таким образом, температура по сечению стержня будет постоянна и его можно представить в виде бесконечной пластины толщиной L с адиабатическими условиями на границах.

Исходя из условий задачи, в пластине действует равномерно распределенный источник тепла мощностью $Q(x)$:

$$Q(x) = Q_{\text{уд}}, 0 < x < L,$$

$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2,\ j = I/S,\ S = \pi d^2/4,$$

где S – площадь стержня.

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x), 0 < x < L.$$

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$t = 0, T = T_0, 0 \le x \le L:$$

$$x = 0:\ -\frac{\partial T}{\partial x} = q_1,\ \ t > 0;$$

$$x = L:\ -\frac{\partial T}{\partial x} = q_2,\ \ t > 0:$$

$$q_1 = q_2 = 0.$$

Для решения сформулированной краевой задачи применим метод конечных разностей на основе неявной четырехточечной схемы. В результате аппроксимации частных производных получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$c\rho \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right),\ i = 2, \dots, N-1,\ n \ge 0. \qquad (40)$$

Полученную систему можно свести к наиболее общему виду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i,$$

где $A_i = C_i = \frac{\lambda}{h^2},\ B_i = \frac{2\lambda}{h^2} + \frac{c\rho}{\tau},\ F_i = -\frac{c\rho}{\tau} T_i^n + Q_i^n.$

Прогоночные коэффициенты находятся по формулам (20). Далее неизвестное поле температуры определяется по выражению (19).

Одномерное уравнение теплопроводности с зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности

Рассмотренные выше решения для температурных полей в одномерной и двумерной постановке получены при условии постоянства коэффициента теплопроводности. В действительности коэффициент теплопроводности достаточно часто зависит от температуры .

Нелинейное одномерное уравнение теплопроводности в этом случае будет иметь вид:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right),\ 0<x<L. \tag{41}$$

Для уравнения (41) рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{gathered} t=0, T=T_0, 0\le x\le L: \\ x=0: T=T_{\text{л}},\ \ t>0; \\ x=L: T=T_n,\ \ t>0: \end{gathered} \tag{42}$$

Эту задачу также будем решать на равномерной сетке и разбиваем пластину по толщине на (N-1) равных промежутков.

Далее заменим дифференциальные операторы в (41), (42) на их конечно-разностные аналоги. Поскольку отличие заключается в появлении коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры, то основной акцент сделаем на аппроксимации диффузионного члена. Рассмотрим сначала *явно-неявную схему*.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{1}{h}\left(\lambda_{i+1/2}^{n}\frac{T_{i+1}^{n+1}-T_i^{n+1}}{h}-\lambda_{i-1/2}^{n}\frac{T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{h}\right),$$

где $\lambda_{i+1/2}^{n}=\frac{\lambda_i^n+\lambda_{i+1}^n}{2}$, $\lambda_{i-1/2}^{n}=\frac{\lambda_{i-1}^n+\lambda_i^n}{2}$.

Таким образом, в результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$c\rho\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau}=\frac{1}{h}\left(\lambda_{i+1/2}^{n+1}\frac{T_{i+1}^{n+1}-T_i^{n+1}}{h}-\lambda_{i-1/2}^{n+1}\frac{T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{h}\right),$$
$$i=2,\dots,N-1,n\geq 0, \tag{43}$$

где $\lambda_{i+1/2}^n=\frac{\lambda_i^n+\lambda_{i+1}^n}{2}$, $\lambda_{i-1/2}^n=\frac{\lambda_{i-1}^n+\lambda_i^n}{2}$, при этом λ_i^n вычисляются по формуле $\lambda_i^n=F(T_i^n)$. Добавляя к системе (43) конечно-разностные аналоги краевых условий:

$$T_i^0=T_0, i=\overline{2,N-1};$$
$$T_1^n=T_л, n>0;$$
$$T_N^n=T_n, n>0;$$

получим замкнутую разностную задачу.

Полученную систему можно свести к наиболее общему виду:

$$A_iT_{i+1}^{n+1}-B_iT_i^{n+1}+C_iT_{i-1}^{n+1}=F_i, \text{ где}$$
$$A_i=C_i=\frac{\lambda_{i+1/2}^n}{h^2},\ B_i=\frac{\lambda_{i+1/2}^n+\lambda_{i-1/2}^n}{h^2}+\frac{c\rho}{\tau},\ F_i=\frac{c\rho}{\tau}T_i^n$$
$$\lambda_{i+1/2}^n=\frac{\lambda_i^n+\lambda_{i+1}^n}{2},\ \lambda_{i-1/2}^n=\frac{\lambda_{i-1}^n+\lambda_i^n}{2},\ \lambda_i^n=F(T_i^n).$$

Прогоночные коэффициенты находятся по формулам (20). Далее неизвестное поле температуры определяется по выражению (19).

Рассмотрим *чисто неявную схему*.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{1}{h}\left(\lambda_{i+1/2}^{n+1}\frac{T_{i+1}^{n+1}-T_i^{n+1}}{h}-\lambda_{i-1/2}^{n+1}\frac{T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{h}\right),$$

где

$$\lambda_{i+1/2}^{n+1}=\frac{\lambda_i^{n+1}+\lambda_{i+1}^{n+1}}{2},\ \lambda_{i-1/2}^{n+1}=\frac{\lambda_{i-1}^{n+1}+\lambda_i^{n+1}}{2}.$$

Таким образом, в результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$c\rho\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau}=\frac{1}{h}\left(\lambda_{i+1/2}^{n+1}\frac{T_{i+1}^{n+1}-T_i^{n+1}}{h}-\lambda_{i-1/2}^{n}\frac{T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{h}\right),$$
$$i=2,\dots,N-1,n\geq 0, \tag{44}$$

где

$$\lambda_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\lambda_i^{n+1}+\lambda_{i+1}^{n+1}}{2},\ \lambda_{i-1/2}^{n+1} = \frac{\lambda_{i-1}^{n+1}+\lambda_i^{n+1}}{2},$$

при этом λ_i^{n+1} вычисляются по формуле:

$$\lambda_i^{n+1} = F(T_i^n).$$

Добавляя к системе (44) конечно-разностные аналоги краевых условий:

$$T_i^0 = T_0, i = \overline{2, N-1};$$

$$T_1^n = T_л, n > 0;$$

$$T_N^n = T_n, n > 0;$$

получим замкнутую разностную задачу.

При этом видно, что полученная система уравнений является нелинейной, поэтому для решения этой системы воспользуемся методом простой итерации.

Этот метод заключается в следующем – на каждом шаге по времени мы будем определять поле температуры, до тех пор пока оно не прекратит изменяться с изменением, т.е.

$$c\rho\frac{T_i^{s+1}-T_i^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left(\lambda_{i+1/2}^s\frac{T_{i+1}^{s+1}-T_i^{s+1}}{h} - \lambda_{i-1/2}^s\frac{T_i^{s+1}-T_{i-1}^{s+1}}{h}\right), \qquad (45)$$

где s – номер итерации.

Видно, что система (45) уже является линейной относительно T_i^{s+1}, что позволяет воспользоваться методом прогонки и определить неизвестное поле температуры. Но при этом система (45) решается до тех пор пока поле температуры не перестанет отличаться от предыдущего приближения, т.е. в качестве условия остановки счета на данном временном слое можно использовать следующее соотношение:

$$\frac{\max|T_i^{s+1}-T_i^s|}{\max|T_i^{s+1}|} \le \varepsilon, \qquad (46)$$

где ε – точность вычислений. Когда условие (46) выполняется, то $T_i^{s+1} = T_i^{n+1}$. В качестве начального приближения можно рассматривать следующее: $T_i^{s=0} = T_i^n$.

Блок-схема к рассматриваемой задаче представлена на рис. 16.

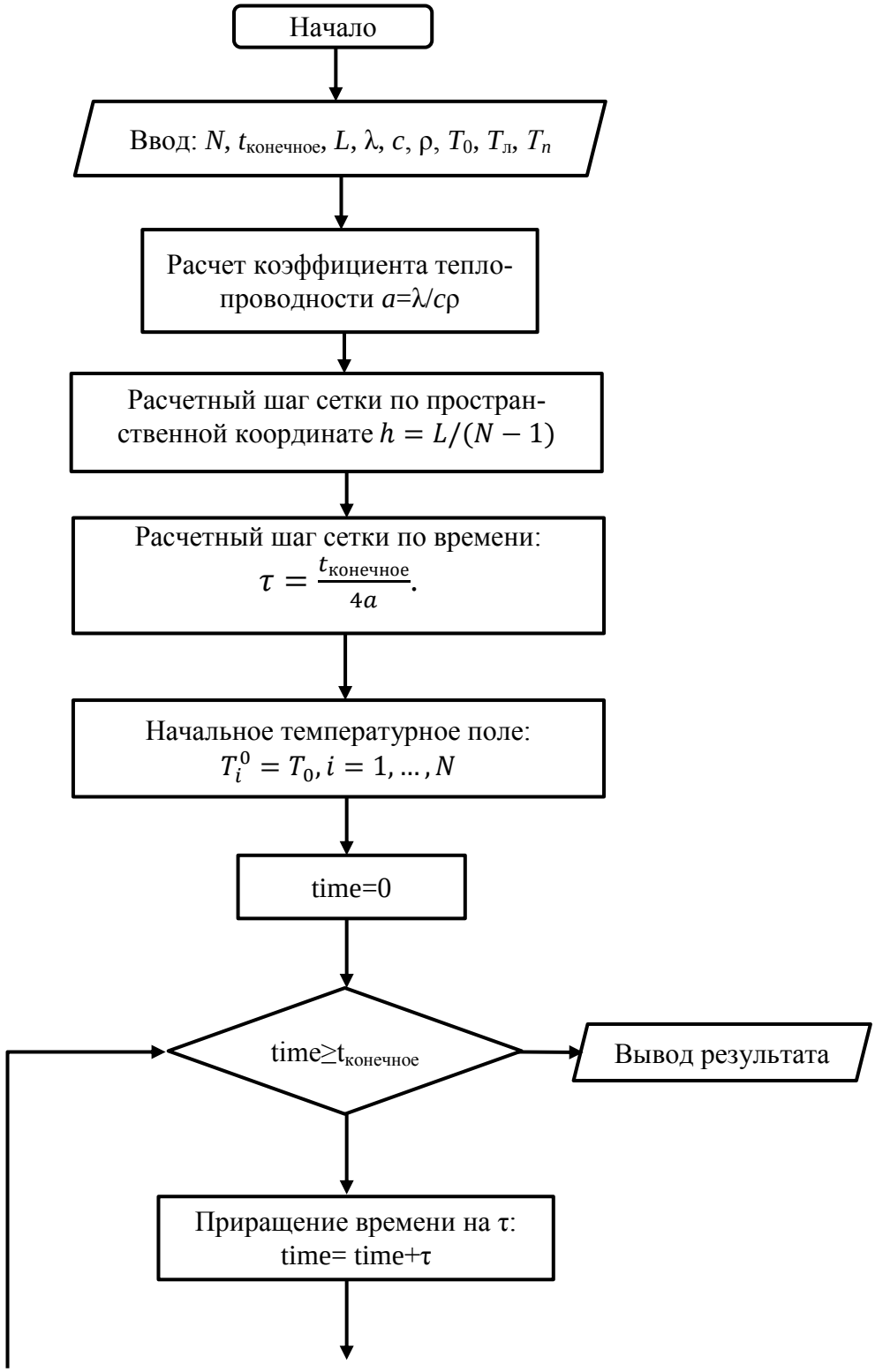


Рис. 16. Блок-схема к рассматриваемой задаче (метод итераций).
Окончание на с. 47

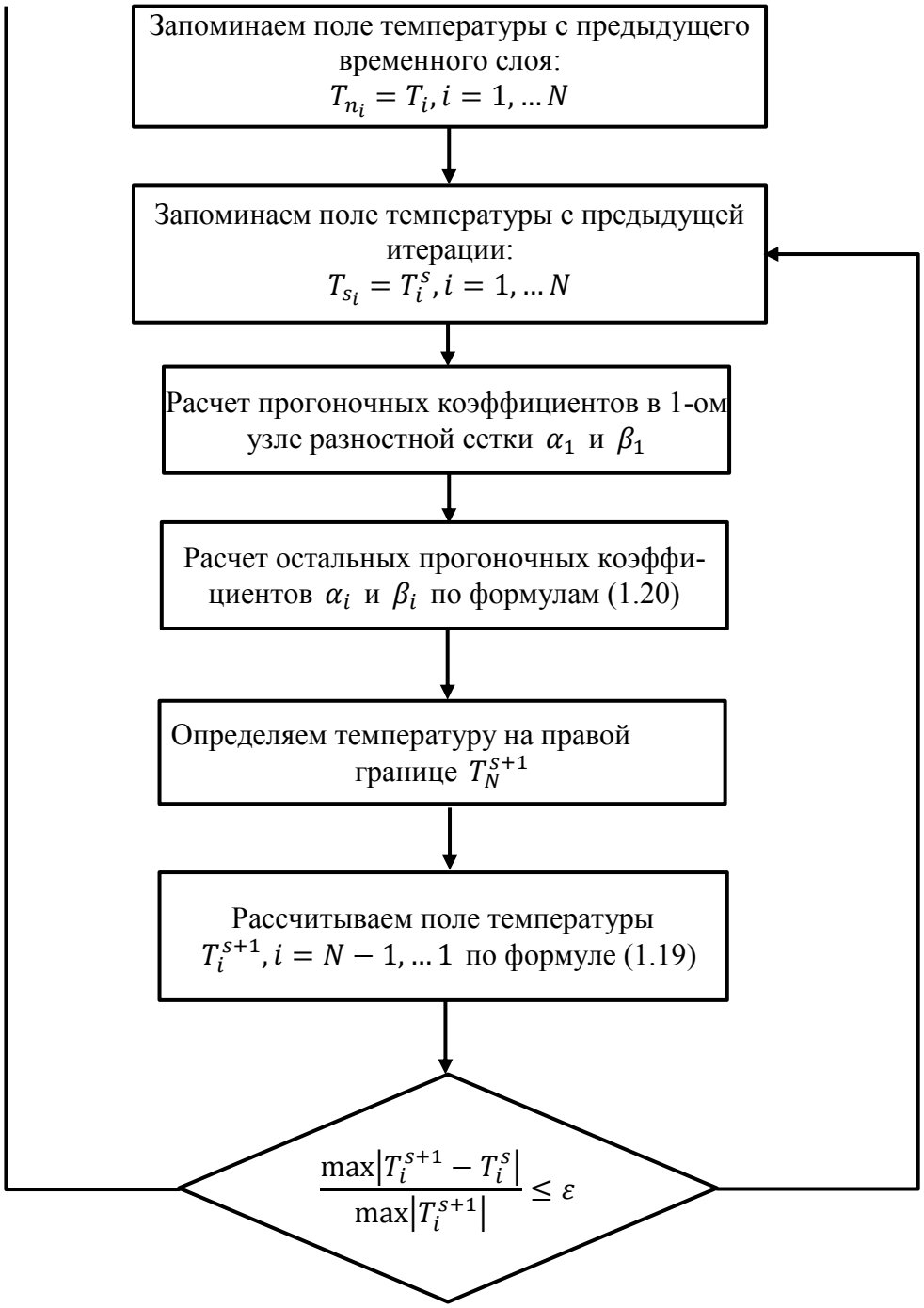


Рис. 16. Окончание

Температурную зависимость коэффициента теплопроводности можно учесть и в рамках явной схемы.

Аппроксимируя частные производные соответствующими конечными разностями получаем следующее соотношения для определения поля температуры:

$$c\rho\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau}=\lambda\left(\frac{T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n}{h^2}\right),\ i=2,\dots,N-1,\ n\geq 0.$$

Рассмотрим следующую ситуацию (рис. 17). Пусть мы имеем несколько соприкасающихся между собой, но теплоизолированных друг от друга слоев металла разной толщины и с разными теплофизическими свойствами. В начальный момент времени в этом многослойном «брикете» существует некоторое температурное поле, причем температуры границ соседних слоев равны. В последующие моменты времени температурное поле выравнивается. Рассмотрим слои (*i-1*, *i*) и (*i*, *i*+1): выравнивание температур этих слоев будет удовлетворять изотермическим (адиабатическим) условиям на границах слоев.

Выполним изотермическое граничное условие, например, для точки *i-1* слоя *1* следующим образом. Для расчета приращения температуры

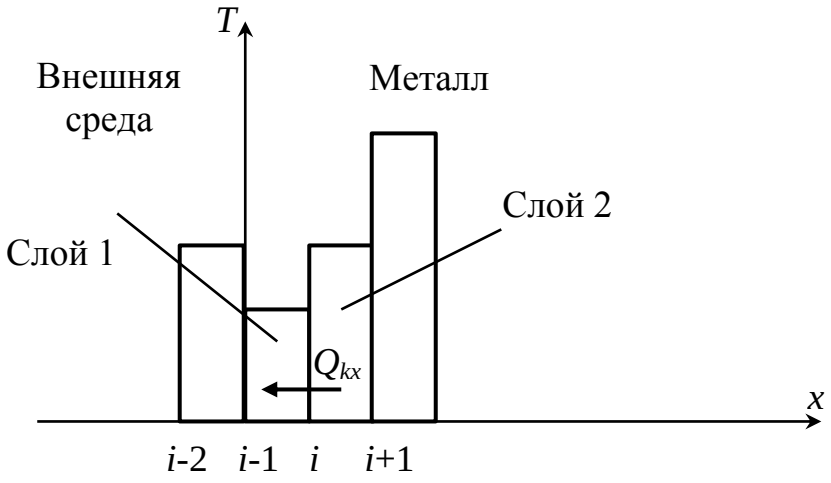


Рис. 17. К расчету Q_{Kx} (учет температурной зависимости теплофизических свойств) и выполнение адиабатического условия на границе раздела металл – внешняя среда

необходимо знать значения температур 3-х точек в предыдущий момент времени. Значения температур точек x_{i-1} и x_i известны, поэтому на расстоянии h_1 от точки x_{i-1} берется фиктивная точка x_{i-2} с температурой, равной температуре точки x_i. Температура в точке x_{i-1} определится:

$$T_{i-1}^{n+1} = T_{i-1}^{n} + \Delta T_{i-1} \frac{\lambda \tau}{c\rho} \left(\frac{T_i^n - 2T_{i-1}^n + T_i^n}{h^2} \right),$$

где

$$\Delta T_{i-1} = \frac{\lambda_1 \tau}{c\rho_1} \left(\frac{T_i^n - 2T_{i-1}^n + T_i^n}{{h_1}^2} \right) = 2 \frac{a_1 \tau}{{h_1}^2} (T_i^n - T_{i-1}^n),\ a_1 = \frac{\lambda_1}{c\rho_1}$$

В общем случае приращение температуры на адиабатической границе, расположенной справа, будет:

$$\Delta T_x = 2 \frac{a_{\text{ср}} \tau}{{h_1}^2} (T_{x-1}^n - T_x^n), \tag{47}$$

где $a_{\text{ср}}$ – коэффициент температуропроводности, определяемый по средней температуре слоя 1.

Используя уравнение (47), определим приращение температуры точки i слева и справа от. При этом надо выполнить условие равенства температур на общей границе слоев.

$$\Delta T_i|_{\text{сл}} = \Delta T_i|_{\text{сп}}. \tag{48}$$

Т.к. средняя температура слоев 1и 2 и их размеры разные, то разными будут и их теплофизические свойства, а, следовательно, и скорости охлаждения. Поэтому, если температура слоев переменна, то для удовлетворения условия (48) на границе раздела i вводится тепловой поток, возникающий вследствие разных скоростей охлаждения. При этом количество тепла, подводимое к границе, равно количеству тепла, отводимому от нее. Запишем $\Delta T_i|_{\text{сл}}$ и $\Delta T_i|_{\text{сп}}$:

$$\Delta T_i|_{\text{сл}} = \frac{a_1 \tau}{{h_1}^2} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) - \frac{Q_{K_x}}{c\rho_1} \tau. \tag{49}$$

$$\Delta T_i|_{\text{сп}} = \frac{a_2 \tau}{{h_2}^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) + \frac{Q_{K_x}}{c\rho_2} \tau. \tag{50}$$

где Q_{K_x} – тепловой поток на границе слоев (рис. 17).

Найдем значение Q_{K_x}. Для этого выполним условие (48) и прирав-

няем правые части уравнений (49) и (50):

$$2\frac{a_1\tau}{{h_1}^2}(T_{i-1}^n - T_i^n) - \frac{Q_{K_x}}{c\rho_1}\tau = \Delta T_i|_{\text{сп}} = 2\frac{a_2\tau}{{h_2}^2}(T_{i+1}^n - T_i^n) + \frac{Q_{K_x}}{c\rho_2}\tau;$$

$$\frac{Q_{K_x}}{c\rho_1} + \frac{Q_{K_x}}{c\rho_2} = 2\frac{a_1}{{h_1}^2}(T_{i-1}^n - T_i^n) - \frac{a_2}{{h_2}^2}(T_{i+1}^n - T_i^n);$$

$$Q_{K_x}\left(\frac{c\rho_1+c\rho_2}{c\rho_1 c\rho_2}\right) = 2\left(\frac{a_1}{{h_1}^2}T_{i-1}^n - \frac{a_1}{{h_1}^2}T_i^n - \frac{a_2}{{h_2}^2}T_{i+1}^n + \frac{a_2}{{h_2}^2}T_i^n\right).$$

После несложных математических преобразований получим выражения для теплового потока:

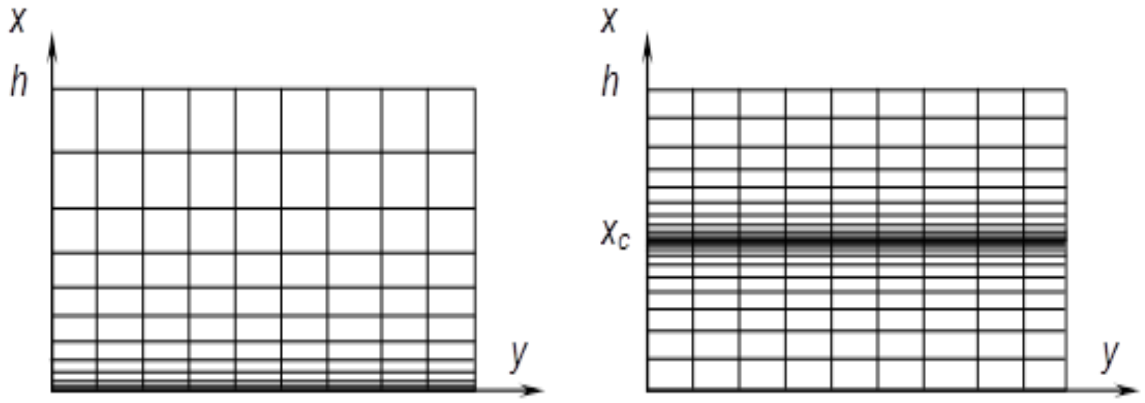
$$Q_{K_x} = 2\frac{c\rho_1 c\rho_2}{(c\rho_1+c\rho_2)(h_1h_2)^2}\left[T_i^n({h_1}^2a_2 - {h_2}^2a_1) + (T_{i-1}^n{h_2}^2a_1 - T_i^n{h_1}^2a_2)\right]. \quad (51)$$

$Q_{\text{Кх}}$ выступает в роли как источника, так и стока теплоты (в зависимости от градиента температуры).

Таким образом, приведя конечно-разностный аналог дифференциального уравнения теплопроводности к виду (47) и введя дополнительный член (51), удается решить проблему учета температурной зависимости коэффициента температуропроводности, а также получить возможность решения тепловой задачи на любых координатных сетках, оставаясь в рамках простой явной схемы.

Следует отметить, что температурная зависимость коэффициента температуропроводности не противоречит основному дифференциальному уравнению теплопроводности, т.к. он остается постоянным в пределах элементарных слоев для которых по сути решаются отдельные, независимые тепловые задачи, которые связываются между собой тепловым потоком (51).

Для выполнения условий сходимости вместо h подставляется наименьшее значение h_i слоев, образующих границу раздела между разнородными металлами. При этом возрастающие значения толщин следующих слоев обеспечивают еще более благоприятные условия сходимости для решения.



а *б*

Рис. 18. Одностороннее распределение узлов сетки (*а*) и сгущение сетки вблизи внутренней границы (*б*)

В случае решения практических задач теплопроводности, необходимо одностороннее измельчение расчетной сетки (рис. 18, *а*).

Для решения первой задачи введем следующее преобразование координат, соответствующее (рис. 18, *а*):

$$\bar{x} = 1 - \frac{\ln\left\{\left[\beta + 1 - \left(\frac{x}{h}\right)\right] / \left[\beta - 1 + \left(\frac{x}{h}\right)\right]\right\}}{\ln\left[(\beta+1)/(\beta-1)\right]}.$$

Это преобразование размещает тем большее количество точек вблизи x=0, чем ближе параметр β к 1.

Обратное преобразование находится в виде:

$$x = h\frac{(\beta+1) - (\beta-1)\cdot\left[(\beta+1)/(\beta-1)\right]^{1-\bar{x}}}{\left[(\beta+1)/(\beta-1)\right]^{1-\bar{x}} + 1}.$$

Например, для сварки взрывом, характерна ситуация, когда надо измельчить координатную сетку вблизи некой внутренней границы x_c (рис. 18, *б*). В этом случае преобразование будет:

$$\bar{x} = B + \frac{1}{\tau} ar\ ch\left[\left(\frac{x}{x_c} - 1\right) sh(\tau B)\right],$$

$$B = \frac{1}{2\tau}\ln\left[\frac{1+\left(e^{\tau}-1\right)\frac{x_c}{h}}{1+\left(e^{-\tau}-1\right)\frac{x_c}{h}}\right],\ 0<\tau<\infty.$$

Обратное преобразование:

$$x = x_c\left[1+\frac{sh\left(\tau(\bar{x}-B)\right)}{sh(\tau B)}\right].$$

Здесь параметр τ изменяется от 0 (нет растяжения) до больших значений. При этом координатная сетка измельчается вблизи $x=x_c$ тем больше, чем выше значении τ.

Двумерная задача теплопроводности

В качестве примера рассмотрим пластину с размерами L, H (рис. 19). Горизонтальные границы примем адиабатическими, а на вертикальных границах поддерживаются постоянные температуры T_h и T_c. Температурное поле в пластине равномерное и равно T_0.

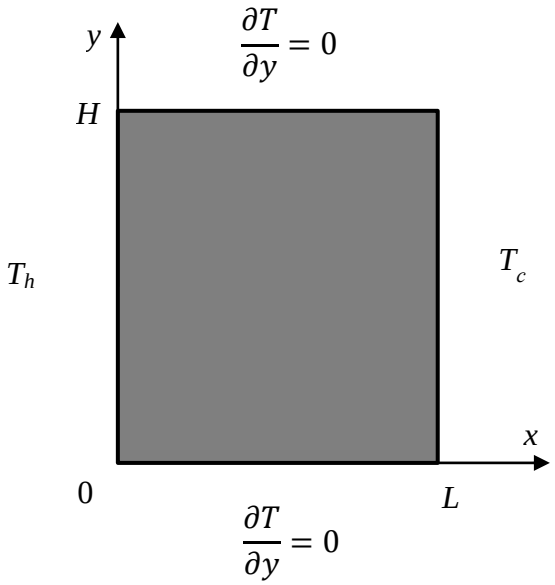


Рис. 19. Геометрия двумерной задачи

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \begin{vmatrix} 0 < x < L; \\ 0 < y < H. \end{vmatrix} \quad (52)$$

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} &t = 0: T = T_0, 0 \le x \ge L, 0 \le y \ge H; \\ &x = 0: T = T_h, t > 0; \\ &x = L: T = T_c, t > 0; \\ &y = 0: T = \frac{\partial T}{\partial y}, t > 0. \\ &y = L: T = \frac{\partial T}{\partial y}, t > 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Для аппроксимации дифференциального уравнения (52) разностным введем пространственно-временную сетку (рис. 20) с координатами

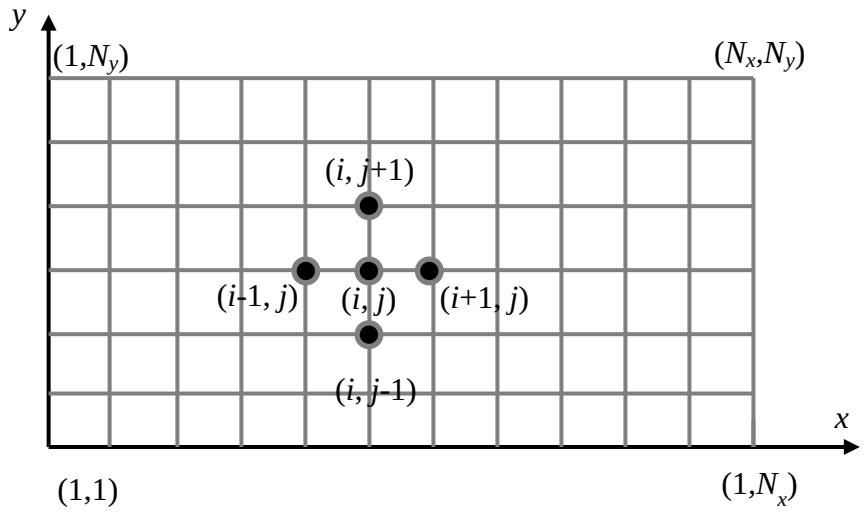


Рис. 20. Разностная сетка двумерной области решения

$$x_i = (i-1)h_x, \quad y_i = (i-1)h_y, \quad t_n = n\tau.$$

где h_x, h_y – шаги сетки по координатам x, y соответственно; τ – шаг по времени; $i = \overline{1, N_x}$; $j = \overline{1, N_y}$; $n = \overline{0, K}$. Таким образом, вся расчетная сетка (рис. 19) покрывается сеткой (см. рис. 20).

Введем следующее обозначение:

$$T(x_i, y_j, t_n) = T_{i,j}^n.$$

Дискретизация уравнения (52) будем проводить на основе локально одномерной схемы Самарского, являющейся абсолютно устойчивой и обладающей свойством суммарной аппроксимации.

Сущность этого подхода состоит в том, что шаг по времени реализуется в два этапа – на промежуточном временном шаге проводим дискретизацию двумерного уравнения (52) только в направлении оси x и получаем одномерное уравнение, после его решения проводим вновь дискретизацию уравнения (52), но уже в направлении оси y и, решая полученное одномерное уравнение, определяем поле температур на целом шаге по времени.

$$c\rho\frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-T_{i,j}^{n}}{\tau}=\lambda\left(\frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}\right), \quad (54)$$

$$c\rho\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau}=\lambda\left(\frac{T_{i,j+1}^{n+1}-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}\right), \quad (55)$$

Разностные уравнения (54), (55) сводятся к стандартному трехдиагональному виду и решаются последовательно методом прогонки. Сначала для всей области решения решается уравнения (54), после того как его решение будет найдено, переходят к уравнению (55).

Рассмотрим решение уравнения (54) методом прогонки. Приведем это уравнение к виду

$$A_i T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-B_i T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+C_i T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}=F_i,$$

тогда коэффициенты $A_i,\ B_i,\ C_i$ примут вид:

$$A_i=C_i=\frac{\lambda}{h_x^2},\ B_i=\frac{2\lambda}{h_x^2}+\frac{c\rho}{\tau},\ F_i=-\frac{c\rho}{\tau}T_{i,j}^{n}.$$

Для определения прогоночных коэффициентов по соотношению (20) необходимо найти α_1 и β_1 из левого граничного условия. Далее определяя значение $T_{N_x,j+1}^{n+\frac{1}{2}}$ из правого граничного условия, находят поле температуры $T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ на промежуточном временном слое по формулам (19). После этого приступают к решению уравнения (55) аналогично решению уравнения (54). Блок-схема алгоритма решения двумерной задача представлена на рис. 21.

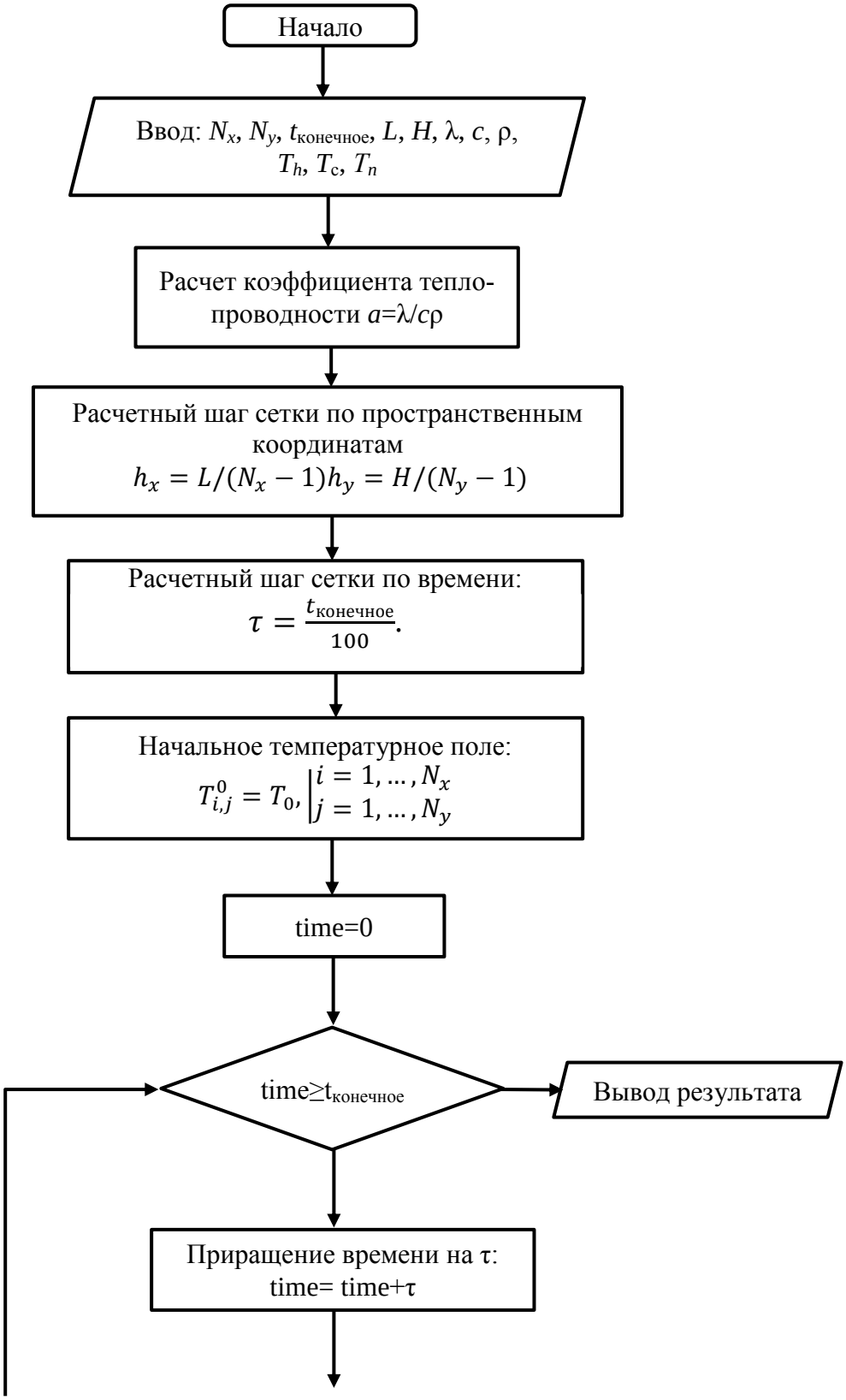


Рис. 21. Блок-схема к рассматриваемой задаче (двумерная область решения). Окончание на стр. 57

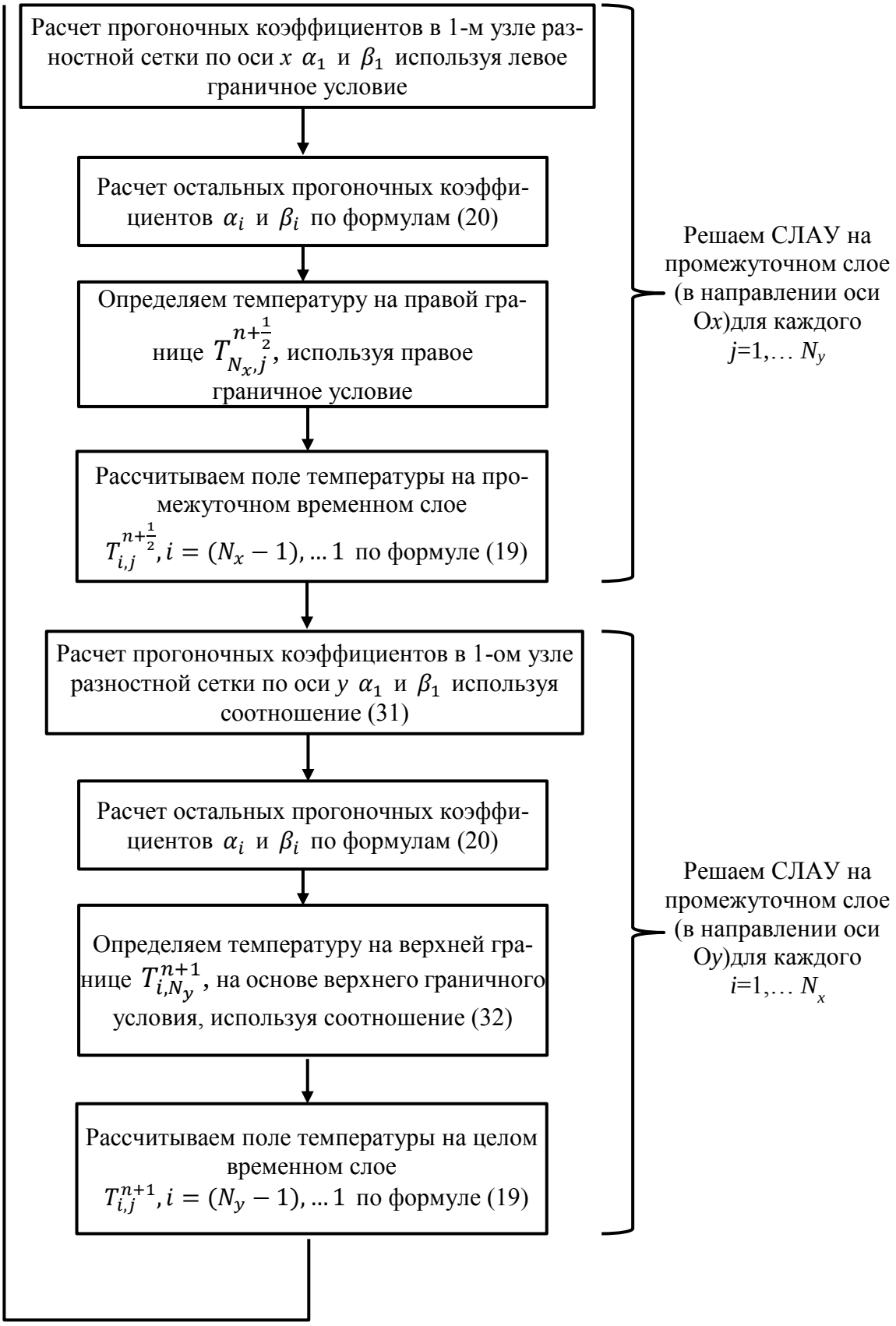


Рис. 21. Окончание

Список используемой литературы

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС, 2003. – 782 с.

2. Лыков А. В. Тепломассообмен: (Справочник). – М.: Энергия, 1978. -480 с.

3. Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие / Г.В., Кузнецов, М.А Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с

4. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

5. Волков Е. А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

6. Турчак Л. И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 318 с.

7. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.

8. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 695 с.

9. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

У ч е б н о е и з д а н и е

Святослав Викторович **Хаустов**

Валентин Олегович **Харламов**

Сергей Викторович **Кузьмин**

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СВАРКЕ

Учебно-методическое пособие

Выпускающий редактор *Н. Н. Кваша*

Темплан 2016 г. Поз. № 224
Подписано в печать 15.12.2016 Формат 60×84 1/16. Бумага газетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,48 Уч.-изд. л. 2,97.
Тираж 50 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет
400005, Волгоград, просп. В. И. Ленина, 28, корп. 1 .

Отпечатано в типографии ИУНЛ ВолгГТУ .
400005, Волгоград, просп. В. И. Ленина, 28, корп. 7.